

Řešení úloh 1. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 2, 4, 7), J. Jírů (3) a J. Šlégr (5, 6)

1.a) Protože při ději 1-2 je tlak plynu přímo úměrný jeho objemu, platí

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}.$$

Ze stavové rovnice $p_1V_1 = nRT_1$ a $p_2V_2 = nRT_2$ a ze zadání $\frac{p_2}{p_1} = k$ dostaneme po úpravách

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \frac{T_2}{T_1} = k^2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = k^2T_1 = 4T_1 = 1200 \text{ K.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

b) Užitím Boylova-Mariottova zákona

$$p_2V_2 = p_3V_3, \quad (1)$$

$$p_1V_1 = p_4V_4. \quad (2)$$

Z přímé úměrnosti mezi tlakem a objemem

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \quad (3)$$

$$\frac{p_3}{V_3} = \frac{p_4}{V_4}. \quad (4)$$

Víme také, že $V_2 = V_4$.

Po úpravách z rovnic (1) a (2)

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{\frac{p_4V_4}{V_1}}{\frac{p_2V_2}{V_3}} = \frac{p_4V_3}{p_2V_1}.$$

Po dosazení z rovnic (3) a (4)

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_4V_3}{p_2V_1} = \frac{\frac{p_3}{V_3}V_4V_3}{\frac{p_1}{V_1}V_2V_1} = \frac{p_3}{p_1} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_3. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

c) Při ději 1-2 plyn přijme teplo, které slouží ke zvýšení jeho vnitřní energie a na vykonání práce

$$\begin{aligned} nC(T_2 - T_1) &= \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \\ &= \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) = 2nR(T_2 - T_1) \quad \Rightarrow \quad C = 2R. \end{aligned} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

d) Účinnost kruhového děje

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) - \frac{1}{2}(p_3V_3 - p_4V_4) - nRT_4 \ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right)}{nC(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(nRT_2 - nRT_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) - \frac{1}{2}(nRT_3 - nRT_4) - nRT_4 \ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right)}{nC(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)}.$$

Po dosazení $T_3 = T_2 = 4T_1$, $T_4 = T_1$, $\frac{V_3}{V_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{2p_1}{p_1} = 2$, $\frac{V_4}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2V_1}{V_1} = 2$ a $C = 2R$ dostaneme

$$\eta = \frac{3 \ln 2}{6 + 4 \ln 2} = 0,24. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- 2.a) Při plnění bude objem balónu vždy menší než jeho největší možný objem $V \leq \frac{4}{3}\pi r^3$.
 Tlak hélia uvnitř balónu bude během zvětšování jeho objemu roven atmosférickému tlaku. Maximální hmotnost hélia uvnitř balónu bude při jeho největším objemu a atmosférickém tlaku

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_{\text{He}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{p_0 \cdot M_{\text{He}}}{RT}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Při hmotnosti hélia $m < m_0$ je objem balónu $V = \frac{m}{M_{\text{He}}} \frac{RT}{p_0}$. **2 body**

- b) Aby byla výsledná síla orientována vzhůru, musí být vztlaková síla větší než tíha samotného balónu a jeho héliové náplně:

$$V \rho_{\text{vz}} g > mg + 4\pi r^2 \sigma g, \quad (1)$$

kde

$$\rho_{\text{vz}} = \frac{p_0 M_{\text{vz}}}{RT}.$$

Pro $m \leq m_0$ je $V = \frac{m}{M_{\text{He}}} \frac{RT}{p_0}$. Po dosazení za V a ρ_{vz} do (1)

$$\begin{aligned} \frac{m M_{\text{vz}}}{M_{\text{He}}} &> m + 4\pi r^2 \sigma, \\ m \left(\frac{M_{\text{vz}}}{M_{\text{He}}} - 1 \right) &> 4\pi r^2 \sigma, \\ m > \frac{4\pi r^2 \sigma}{\frac{M_{\text{vz}}}{M_{\text{He}}} - 1} &= \frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{vz}} - M_{\text{He}}}. \end{aligned}$$

Pro $m \geq m_0$ je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ a podmínka (1) přejde do nerovnice

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0 M_{\text{vz}}}{RT} > m + 4\pi r^2 \sigma,$$

takže

$$m < 4\pi r^2 \left(\frac{p_0 M_{\text{vz}} r}{3RT} - \sigma \right).$$

Aby výsledná síla působila směrem nahoru, musí být hmotnost hélia z intervalu

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{vz}} - M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2 \left(\frac{p_0 M_{\text{vz}} r}{3RT} - \sigma \right). \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

c) Aby byl interval přípustných hodnot hmotnosti neprázdný, musí být splněna nerovnost

$$\frac{4\pi r^2 \sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{vz}} - M_{\text{He}}} < 4\pi r^2 \left(\frac{p_0 M_{\text{vz}} r}{3RT} - \sigma \right) \Rightarrow r > \frac{3RT\sigma}{p_0 (M_{\text{vz}} - M_{\text{He}})}.$$

Pokud tato podmínka splněna nebude, balón se nevznesse ani v případě dosažení svého maximálního objemu. $\mathbf{2 \text{ body}}$

3.a) Označme v velikost okamžité rychlosti pohybu hladiny, h okamžitou výšku hladiny a s dráhu uraženou klesáním hladiny. V libovolném okamžiku je splněna rovnice spojitosti

$$S_1 v = S_2 \sqrt{2gh},$$

kde $h = h_0 - s$. Z rovnice získáme např. závislost rychlosti v hladiny na dráze s uražené hladinou:

$$v = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g(h_0 - s)} = \sqrt{\frac{2gh_0 S_2^2}{S_1^2} - \frac{2gS_2^2}{S_1^2} \cdot s}. \quad (1)$$

Je-li pohyb hladiny rovnoměrně zpomalený, musí splňovat rovnice

$$\begin{aligned} v &= v_0 - at, \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2} at^2. \end{aligned}$$

Vyloučíme čas a budeme též hledat závislost rychlosti na dráze:

$$s = v_0 \frac{v_0 - v}{a} - \frac{1}{2} a \left(\frac{v_0 - v}{a} \right)^2 = \frac{v_0^2 - v^2}{2a},$$

neboli

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2a \cdot s}. \quad (2)$$

Rovnice (1) a (2) představují stejnou funkční závislost typu $v = \sqrt{A - Bs}$, kde A, B jsou kladné konstanty. Tím je důkaz proveden. $\mathbf{4 \text{ body}}$

(Případně jiné korektní provedení důkazu není na závadu.)

b) Porovnáním koeficientů v rovnicích (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} A &= v_0^2 = \frac{2gh_0 S_2^2}{S_1^2}, \\ B &= 2a = \frac{2gS_2^2}{S_1^2}. \end{aligned}$$

Z vztahů plyne

$$v_0 = \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh_0},$$

$$a = \frac{S_2^2}{S_1^2}g.$$

V okamžiku odtoku veškeré vody je $h = 0$ a z rovnice spojitosti vyplývá $v = 0$. Doba výtoku je proto

$$T = \frac{v_0}{a} = \frac{S_1}{S_2} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- c) Hladina se pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem do zastavení. Označme T_2 dobu výtoku druhé třetiny objemu vody. Z počáteční výšky h_0 se hladina zastaví za čas $T_1 + T_2 + T_3$, z výšky $\frac{2h_0}{3}$ se zastaví za čas $T_2 + T_3$ a z výšky $\frac{h_0}{3}$ se zastaví za čas T_3 . Tedy platí rovnice

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2}a(T_1 + T_2 + T_3)^2, \\ \frac{2h_0}{3} &= \frac{1}{2}a(T_2 + T_3)^2, \\ \frac{h_0}{3} &= \frac{1}{2}aT_3^2. \end{aligned}$$

Rovnice upravíme

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &= \sqrt{\frac{6h_0}{3a}}, \\ T_2 + T_3 &= \sqrt{\frac{4h_0}{3a}}, \\ T_3 &= \sqrt{\frac{2h_0}{3a}}. \end{aligned}$$

Z první a druhé rovnice dostaneme

$$T_1 = \sqrt{\frac{6h_0}{3a}} - \sqrt{\frac{4h_0}{3a}}.$$

Hledaný poměr pak je

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{\sqrt{\frac{2h_0}{3a}}}{\sqrt{\frac{6h_0}{3a}} - \sqrt{\frac{4h_0}{3a}}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3,15. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Alternativní řešení

- a) Opět využijeme rovnici spojitosti

$$S_1v = S_2\sqrt{2gh} = S_2\sqrt{2g(h_0 - s)},$$

kde $h = h_0 - s$. Úlohu vyřešíme pomocí časové závislosti s využitím integrálního počtu.

Okamžitá rychlost poklesu hladiny je

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{dh}{dt} = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh}.$$

Budeme hledat závislost okamžité výšky h na čase t . V rovnosti mezi třetím a čtvrtým výrazem provedeme separaci proměnných, integrujeme a dále upravujeme:

$$\begin{aligned}\frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g} dt, \\ \int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} &= -\int_0^t \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g} dt, \\ 2 \left[h^{\frac{1}{2}} \right]_{h_0}^h &= -\frac{S_2}{S_1}\sqrt{2g} [t]_0^t, \\ \sqrt{h} - \sqrt{h_0} &= -\frac{S_2}{2S_1}\sqrt{2g}t, \\ h &= h_0 - \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh_0} t + \frac{S_2^2}{2S_1^2}gt^2.\end{aligned}$$

Časová závislost dráhy pak je

$$s = h_0 - h = \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh_0} t - \frac{S_2^2}{2S_1^2}g t^2. \quad (3)$$

Dostali jsme kvadratickou funkci s kvadratickým a lineárním členem, tedy časovou závislost dráhy rovnoměrně zpomaleného pohybu

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2. \quad (4)$$

Tím je důkaz proveden.

b) Z porovnání výrazu (3) s výrazem (4) plyne

$$\begin{aligned}v_0 &= \frac{S_2}{S_1}\sqrt{2gh_0}, \\ a &= \frac{S_2^2}{S_1^2}g.\end{aligned}$$

Doba výtoku je

$$T = \frac{v_0}{a} = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

4.a,b) Úlohu budeme řešit v neinerciální soustavě spojené s kuličkou. V horním bodu trajektorie na kuličku působí odstředivá síla $\frac{mv^2}{l}$, tíhová síla mg , síla elektrostatická $k\frac{Q^2}{l^2}$ a tah nitě F_C . Tyto síly musí být v soustavě spojené s kuličkou v rovnováze:

$$\frac{mv^2}{l} - mg - F_C + k\frac{Q^2}{l^2} = 0.$$

Jelikož tah nitě směřuje do středu trajektorie, $F_C \geq 0$, musí rychlost v splňovat nerovnost

$$\frac{mv^2}{l} \geq mg - k\frac{Q^2}{l^2}. \quad (1)$$

Velikost rychlosti v kuličky v horním bodě získáme ze ZZE:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \cdot 2l + \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

(potenciální energie elektrického pole je ve všech polohách kuličky stejná, protože vzdálenost kuličky od středu kružnice se nemění). Z rovnice (2) dostaneme $v^2 = v_0^2 - 4gl$. Aby se kulička dostala na vrchol kružnice, musí být splněna podmínka

$$v_0^2 \geq 4gl. \quad (3)$$

Dosazením za v^2 do nerovnosti (1) dostaneme $\frac{m(v_0^2 - 4gl)}{l} \geq mg - k\frac{Q^2}{l^2}$, tj.

$$v_0^2 \geq 5gl - k\frac{Q^2}{ml}. \quad (4)$$

Nerovnosti (3) a (4) musí být splněny současně. Pro $4gl \leq 5gl - k\frac{Q^2}{ml}$, tedy $gl \geq \frac{kQ^2}{ml}$ ($mg \geq k\frac{Q^2}{l^2}$), platí

$$v_0 = \sqrt{5gl - k\frac{Q^2}{ml}}.$$

Je-li $4gl \geq 5gl - k\frac{Q^2}{ml}$, tedy $mg \leq k\frac{Q^2}{l^2}$, platí

$$v_0 = \sqrt{4gl}.$$

V případě a) $mg = 1,47 \text{ N} \geq k\frac{Q^2}{l^2} = 0,90 \text{ N}$, tedy

$$v_0 = \sqrt{5gl - k\frac{Q^2}{ml}} = 2,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1};$$

3 body

v případě b) $mg = 0,49 \text{ N} \leq k\frac{Q^2}{l^2} = 0,90 \text{ N}$, proto

$$v_0 = \sqrt{4gl} = 1,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3 body

c) V bodech B a D napíná nit síla, jejíž velikost je rovna součtu odstředivé a elektrostatické síly. Rychlost kuličky v_1 určíme ze ZZE:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl + \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2gl = 3gl - k\frac{Q^2}{ml}.$$

Velikost hledané síly

$$F_B = F_D = \frac{mv_1^2}{l} + k\frac{Q^2}{l^2} = \frac{m(3gl - k\frac{Q^2}{ml})}{l} + k\frac{Q^2}{l^2} = 3mg = 4,4 \text{ N}.$$

3 body

V bodě C je velikost hledané síly

$$F_C = \frac{mv^2}{l} - mg + k\frac{Q^2}{l^2} = \frac{m(v_0^2 - 4gl)}{l} - mg + k\frac{Q^2}{l^2} =$$

$$= \frac{m\left(5gl - k\frac{Q^2}{ml} - 4gl\right)}{l} - mg + k\frac{Q^2}{l^2} = 0.$$

Nit není napínána.

V bodě A platí

$$F_A = \frac{mv_0^2}{l} + mg + k\frac{Q^2}{l^2} = \frac{m\left(5gl - k\frac{Q^2}{ml}\right)}{l} + mg + k\frac{Q^2}{l^2} = 6mg = 8,8 \text{ N.}$$

2 body

- 5.a) Pohyb hvězd na okraji jádra ovlivňuje pouze jeho hmotnost. Z rovnosti odstředivé a gravitační síly v neinerciální soustavě spojené s hvězdou

$$\frac{v_0^2}{r_1} = G\frac{M_1}{r_1^2}$$

v okolí kulově symetrického jádra určíme jeho hmotnost

$$M_1 = \frac{v_0^2 r_1}{G} \cong 1,1 \cdot 10^{41} \text{ kg} = 5,4 \cdot 10^{10} M_\odot. \quad (1)$$

2 body

- b) Střední hustota jádra Galaxie je

$$\rho_1 = \frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{3v_0^2}{4\pi G r_1^2} \cong 1,35 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

- c) Pokud je rozložení temné hmoty kulově symetrické, je gravitační pole ve vzdálenosti r od středu Galaxie dáno hmotnostmi $M_1 + m(r)$, kde $m(r)$ je hmotnost temné hmoty v kouli o poloměru r . Z rovnosti odstředivé a gravitační síly dostáváme

$$\frac{v_0^2}{r} = G\frac{M_1 + m(r)}{r^2} \Rightarrow v_0^2 r = G[M_1 + m(r)] \text{ pro } r \geq r_1.$$

Poslední vztah budeme diferencovat:

$$v_0^2 dr = G dm.$$

Hmotnost dm vrstvy z intervalu $(r, r+dr)$ je

$$dm = \rho_2 4\pi r^2 dr$$

a po dosazení za dm do předchozího výrazu máme

$$v_0^2 dr = G\rho_2 4\pi r^2 dr \Rightarrow \rho_2(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} \text{ pro } r \geq r_1. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Největší hustota temné hmoty je na povrchu jádra o poloměru r_1 :

$$\rho_2(r_1) = \frac{v_0^2}{4\pi G r_1^2} = 4,51 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

- d) Hmotnost temné hmoty určíme integrací. Jelikož předpokládáme, že temná hmota je rozložena kolem jádra symetricky, lze hmotnost tenké kulové vrstvy temné

hmoty vyjádřit vztahem

$$dm = 4\pi r^2 \rho_2 dr = \frac{v_0^2}{G} dr.$$

Integrací získáme

$$M_2 = \int_{M_2} dm = \int_{r_1}^{r_2} \frac{v_0^2}{G} dr = \frac{v_0^2}{G} (r_2 - r_1) = \frac{v_0^2}{G} 6r_1. \quad (2)$$

3 body

Hledaný poměr hmotností určíme z vypočtených veličin (1) a (2)

$$\frac{M_2}{M_1} = 6. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

Poznámka: Podle posledních měření představuje běžná pozorovaná hmota pouze přibližně 5 %, temná hmota 27 % a zbytek 68 % hmotnosti vesmíru představuje hmota tzv. „temné energie“. Poměr hmotnosti běžné a temné hmoty je tedy přibližně 1 : 6.

6. Na internetu lze najít, že CD má 625 závitů na 1 mm průměru. Mřížková konstanta je

$$b = \frac{1 \text{ mm}}{625} = 0,0016 \text{ mm} = 1600 \text{ nm}.$$

Pro DVD nalezneme hodnotu 1350 závitů na 1 mm, což odpovídá mřížkové konstantě $b = 740 \text{ nm}$.

Poznámka: Hodnota pro DVD je asi 2,16krát větší, ale na DVD se vejde téměř 7krát více dat ($4,7 \text{ GB}/700 \text{ MB} = 6,7$). Kromě délky stopy u DVD hraje roli i to, že díky použití laseru s kratší vlnovou délkou mohou být jednotlivé bity ve stopě blíže u sebe. Některá DVD navíc využívají více propustných odrazných vrstev nad sebou, takže se na ně vejde až 17 GB dat.

Hodnoty pro maxima prvního řádu, naměřené pro levné laserové ukazovátka s použitím DVD, jsou v následující tabulce:

i	$\frac{x_i}{\text{cm}}$	$\frac{y_i}{\text{cm}}$	$\frac{\alpha_i}{^\circ}$	$\frac{\lambda_i}{\text{nm}}$	$\frac{\Delta\lambda_i}{\text{nm}}$	$\frac{(\Delta\lambda_i)^2}{\text{nm}^2}$
1	8,4	4,0	64,54	668,1	-7,80	60,84
2	9,0	4,3	64,46	667,7	-7,39	54,58
3	9,6	4,8	63,43	661,9	-1,56	2,43
4	10,8	5,1	64,72	669,1	-8,83	77,91
5	11,6	5,8	63,43	661,9	-1,56	2,43
6	12,3	6,4	62,51	656,5	3,86	14,93
7	13,4	6,8	63,09	659,9	0,42	0,18
8	14,5	7,6	62,34	655,4	4,89	23,91
9	15,0	8,1	61,63	651,1	9,19	84,40
10	15,6	8,4	61,70	651,5	8,77	76,89

Pokud určíme průměrnou absolutní odchylku měření (jak se občas na středních školách počítá) $\Delta\lambda$, je výsledná vlnová délka $\lambda = (660 \pm 5) \text{ nm}$.

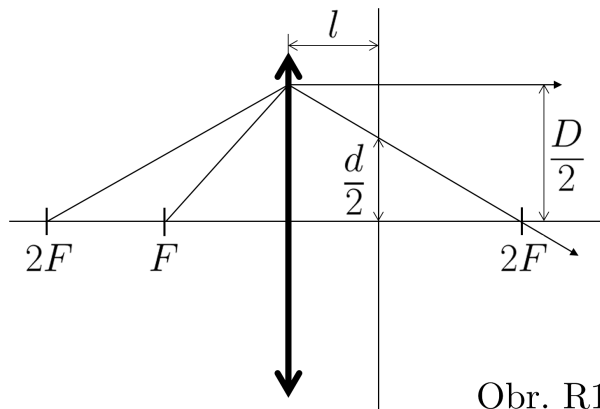
Směrodatná odchylka měření je

$$s_{\bar{\lambda}} = \sqrt{\frac{\sum(\Delta\lambda_i)^2}{N(N-1)}} = 2,104 \text{ nm}$$

a po vynásobení Studentovým součinitelem pro 10 měření a hladinu 97,5 % dostaneme $\lambda = (660 \pm 5) \text{ nm}$.

Na použitém laseru výrobce uvádí vlnovou délku v intervalu 630 až 650 nm, což nevypadá jako dobrá shoda. Měření vláknovým spektrometrem Vernier vedlo k výsledku $\lambda = (657 \pm 1) \text{ nm}$, což je ve shodě s výše uvedeným měřením a ukazuje, že výrobní tolerance laserového ukazovátka za 39 Kč jsou poměrně široké.

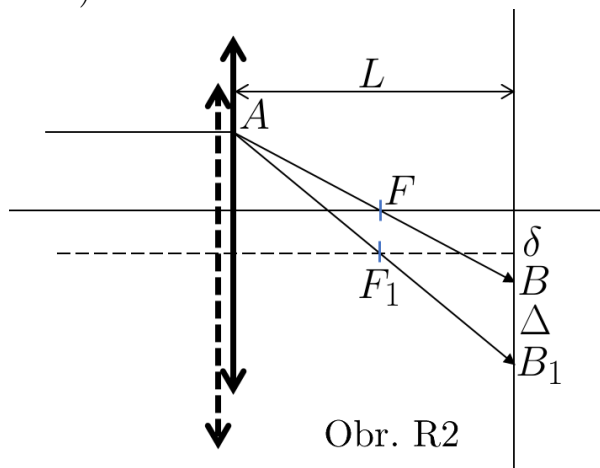
- 7.a) Je-li bodový zdroj v ohnisku čočky, jsou paprsky za čočkou rovnoběžné s optickou osou; je-li zdroj ve vzdálenosti $2f$ před čočkou, sbíhají se paprsky opět ve vzdálenosti $2f$ (obr. R1). **1 bod**



Z podobnosti trojúhelníků

$$\frac{d}{D} = \frac{2f - l}{2f} \Rightarrow f = \frac{Dl}{2(D - d)} = 8,0 \text{ cm.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Paprsek rovnoběžný s optickou osou prochází po průchodu čočkou ohniskem. Posune-li se čočka o vzdálenost δ , posune se o stejnou vzdálenost ve stejném směru i ohnisko (obr. R2). **1 bod**



Trojúhelníky AFF_1 a ABB_1 jsou podobné, proto

$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{f}{L} \Rightarrow f = \frac{\delta L}{\Delta} = 10,0 \text{ cm.} \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$