Řešení úloh 1. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Úlohy navrhli J. Jírů (1, 2, 3, 7), J. Thomas (4, 5) a J. Šlégr (6)

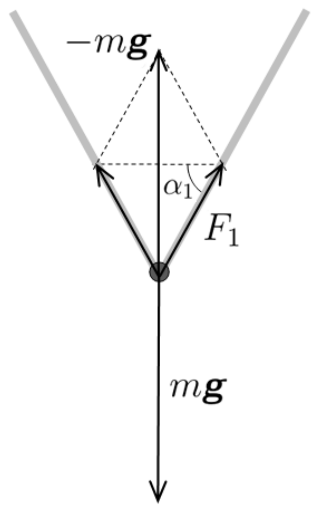
1.a) Označme $\alpha_1 = 60°$ hloubkový úhel stuhy (úhel, který stuha svírá s vodorovným směrem). Výslednice tahových sil obou částí stuhy je v rovnováze s tíhovou silou působící na váleček (obr. R1):

$$2F_1 \sin\alpha_1 = mg.$$

Z rovnice plyne

$$F_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha_1} = \frac{mg}{\sqrt{3}} = 0{,}577mg.$$

1 bod



Obr. R1

b) Zvolme nulovou hladinu potenciální energie válečku v jeho počáteční poloze, pak jeho potenciální energie v poloze, kdy je stuha zcela napnutá, je (obr. R2)

$$E_p = mgh_1 = mgl\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sqrt{3}mgl.$$

Během výstupu válečku se stuha mezi stěnou a tyčkou zkrátí o délku

$$s = 4l - 2l = 2l.$$

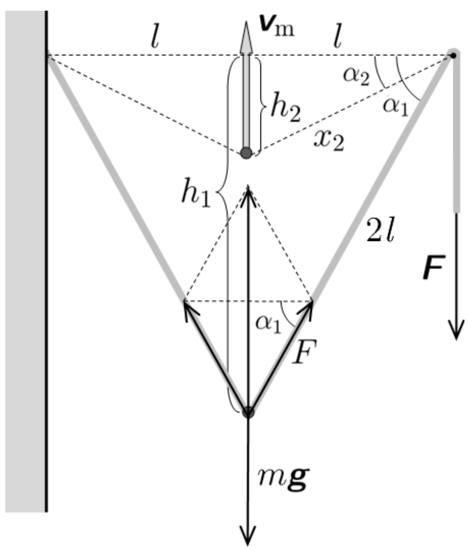
O stejnou délku s posune síla $\boldsymbol{F}$ volný konec stuhy ve směru dolů, přičemž vykoná práci

$$W = Fs = 2Fl.$$

Aby váleček opustil stuhu, musí mít v poloze, kdy je stuha zcela napnutá, nenulovou rychlost, tedy musí být splněna podmínka $W > E_p$. Dosazením dostaneme

$$2Fl > \sqrt{3}mgl \quad \Rightarrow \quad F > \frac{\sqrt{3}}{2}mg = 0{,}866mg.$$

2 body



Obr. R2

c) V počátečním okamžiku působí při tahové síle o velikosti $F = mg$ na váleček ve směru nahoru stuha silou o velikosti $2mg\sin\alpha_1$ a ve směru dolů tíhová síla. Velikost okamžitého zrychlení válečku je

$$a_1 = \frac{2mg\sin\alpha_1 - mg}{m} = (2\sin\alpha_1 - 1)\,g = \left(\sqrt{3} - 1\right) g = 0{,}732g$$

2 body

V okamžiku opuštění stuhy je síla stuhy nulová, na váleček působí pouze tíhová síla. Velikost okamžitého zrychlení válečku je

$$a_1{}' = g.$$

1 bod

Zrychlení $\boldsymbol{a}_1$ má směr svisle vzhůru, zrychlení $\boldsymbol{a}_1{}'$ svisle dolů. (Lze též zapsat $\boldsymbol{a}_1 = -0{,}732\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{a}_1{}' = \boldsymbol{g}$.)

1 bod

d) Rychlost je maximální v okamžiku přechodu válečku ze zrychleného pohybu na zpomalený pohyb, tehdy je zrychlení nulové a výsledná síla působící na váleček nulová. Označme α_2 hloubkový úhel stuhy v této poloze válečku, h_2 odpovídající hloubku válečku a x_2 odpovídající délku části stuhy. Z podmínky

$$2mg\sin\alpha_2 = mg$$

plyne

$$\sin\alpha_2 = \frac{1}{2},\ \cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti $F = mg$ působící na volný konec stuhy vykoná práci

$$W = F\cdot 2\left(2l - x_2\right) = 2mg\left(2l - \frac{l}{\cos\alpha_2}\right) = 2mgl\left(2 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}mgl.$$

Tato práce je rovna součtu získané potenciální energie E_p a kinetické energie E_k válečku, kde

$$E_p = mg\left(h_1 - h_2\right) = mg\left(l\sqrt{3} - l\operatorname{tg}\alpha_2\right) = mgl\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}mgl,$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2.$$

Ze vztahu $E_p + E_k = W$ dalšími úpravami postupně dostaneme hledanou maximální rychlost:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}mgl + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{4\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}mgl,$$

$$4\sqrt{3}gl + 3v_m^2 = 8\left(3-\sqrt{3}\right)gl,$$

$$v_m = \sqrt{4\left(2-\sqrt{3}\right)gl} = \sqrt{1{,}07gl}.$$

3 body

2.a) Velikost magnetické indukce je nepřímo úměrná vzdálenosti od vodiče. Proto velikosti magnetické indukce vyvolané proudem v druhém vodiči v bodě K ve vzdálenosti $2r$ a v bodě L ve vzdálenosti $4r$ jsou

$$B_{2K} = \frac{B_1}{2},\quad B_{2L} = \frac{B_1}{4}.$$

Pro souhlasné proudy mají magnetické indukce v bodě K navzájem opačný směr a v bodě L shodný směr. Proto platí:

$$B_K = B_1 - \frac{B_1}{2} = \frac{B_1}{2},$$

$$B_L = B_1 + \frac{B_1}{4} = \frac{5}{4}B_1.$$

Pro nesouhlasné proudy mají magnetické indukce v bodě K shodný směr a v bodě L navzájem opačný směr. Proto platí:

$$B_K = B_1 + \frac{B_1}{2} = \frac{3}{2}B_1,$$

$$B_L = B_1 - \frac{B_1}{4} = \frac{3}{4}B_1.$$

1 bod

b) Pro vzdálenost x libovolného bodu na dané kružnici od druhého vodiče podle kosinové věty platí

$$x = \sqrt{r^2 + 9r^2 - 2 \cdot r \cdot 3r \cdot \cos\alpha} = r\sqrt{10 - 6\cos\alpha}. \tag{1}$$

Označme φ úhel mezi vektory $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{B}_2$, pak

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\varphi}.$$

Velikost magnetické indukce je nepřímo úměrná vzdálenosti od přímého vodiče, proto platí

$$B_2 = \frac{r}{x}B_1$$

a tedy

$$B = B_1\sqrt{1 + \frac{r^2}{x^2} + 2\frac{r}{x}\cos\varphi}. \tag{2}$$

Dosazením vztahu (1) dostaneme

$$B = B_1\sqrt{1 + \frac{1}{10 - 6\cos\alpha} + \frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}\cos\varphi} =$$

$$= B_1\sqrt{\frac{11 - 6\cos\alpha}{10 - 6\cos\alpha} + \frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}\cos\varphi}.$$

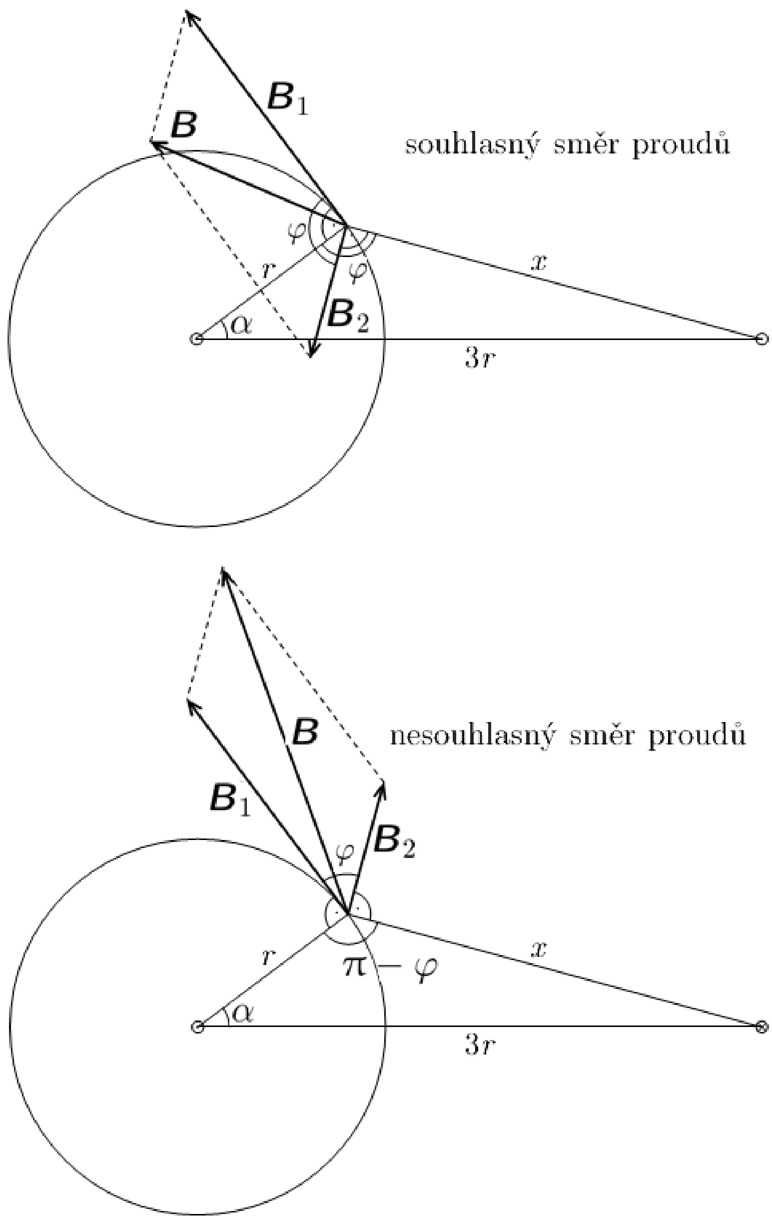
Pomocí sinové věty nahradíme úhel φ úhlem α a užijeme vztah (1):

$$\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi) = \frac{3r}{x}\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}\sin\alpha. \tag{3}$$

Do vztahu mezi goniometrickými funkcemi

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \sin^2\varphi},$$

kde znaménko + platí pro úhel $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a znaménko – pro úhel pro $\varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$, dosadíme vztah (3) a výraz upravíme:



Obr. R3

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{10 - 6\cos\alpha}\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{10 - 6\cos\alpha - 9\sin^2\alpha}{10 - 6\cos\alpha}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - 6\cos\alpha + 9\cos^2\alpha}{10 - 6\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{(1 - 3\cos\alpha)^2}{10 - 6\cos\alpha}} = \pm\frac{|1 - 3\cos\alpha|}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}. \qquad (4)$$

Nyní rozlišíme směry proudů, s rostoucím úhlem α od 0 do π nastávají dvě možnosti:
1) Pro souhlasné proudy úhel φ klesá od π do 0, pro $\cos\alpha \geq \frac{1}{3}$ je $\cos\varphi \leq 0$ $\left(\varphi \geq \frac{\pi}{2}\right)$, pro $\cos\alpha < \frac{1}{3}$ je $\cos\varphi > 0$ $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, tedy vztah (4) má tvar

$$\cos\varphi = \frac{1 - 3\cos\alpha}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}.$$

Jeho dosazením do vztahu (2) dostaneme

$$B = B_1\sqrt{\frac{11 - 6\cos\alpha}{10 - 6\cos\alpha} + \frac{2}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}\frac{1 - 3\cos\alpha}{\sqrt{10 - 6\cos\alpha}}} =$$

$$= B_1\sqrt{\frac{11-6\cos\alpha+2-6\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}},$$

$$B = B_1\sqrt{\frac{13-12\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}}.$$ **3 body**

2) Pro nesouhlasné proudy úhel φ roste od 0 do π, pro $\cos\alpha \geq \frac{1}{3}$ je $\cos\varphi \geq 0$ $\left(\varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$, pro $\cos\alpha < \frac{1}{3}$ je $\cos\varphi < 0$ $\left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$, tedy vztah (4) má tvar

$$\cos\varphi = \frac{-1+3\cos\alpha}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}.$$

Jeho dosazením do vztahu (2) dostaneme

$$B = B_1\sqrt{\frac{11-6\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}+\frac{2}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}\frac{-1+3\cos\alpha}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}} =$$

$$= B_1\sqrt{\frac{11-6\cos\alpha-2+6\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}},$$

$$B = B_1\frac{3}{\sqrt{10-6\cos\alpha}}.$$ **3 body**

Ještě ověříme souhlas funkčních hodnot v bodech K a L s výsledkem úlohy a):
1) Pro souhlasné proudy dostaneme

$$B_K = B_1\sqrt{\frac{13-12\cos 0}{10-6\cos 0}} = \frac{1}{2}B_1,$$

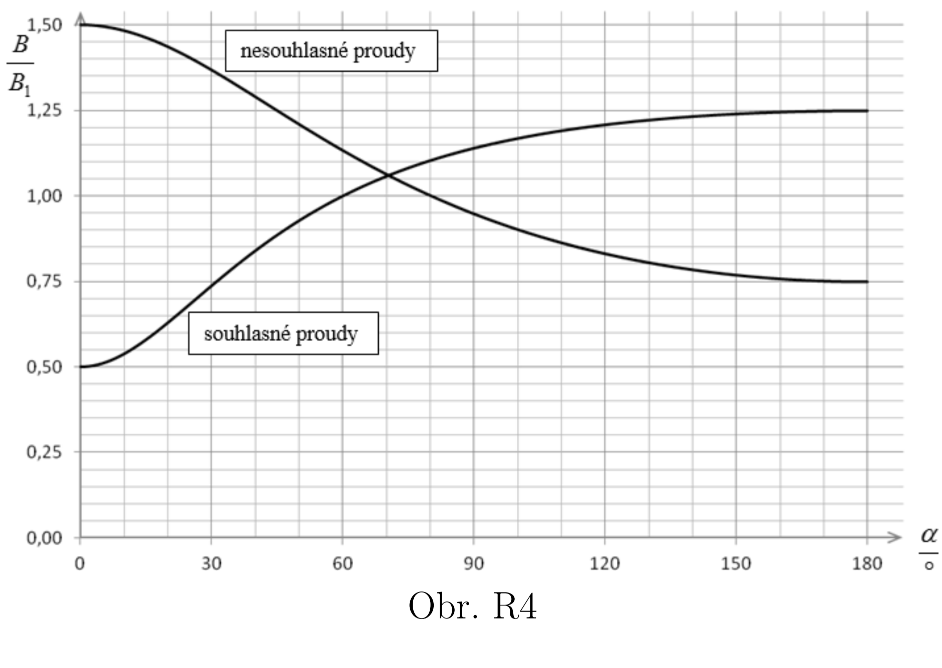
$$B_L = B_1\sqrt{\frac{13-12\cos\pi}{10-6\cos\pi}} = \frac{5}{4}B_1.$$

2) Pro nesouhlasné proudy dostaneme

$$B_K = B_1\frac{3}{\sqrt{10-6\cos 0}} = \frac{3}{2}B_1,$$

$$B_L = B_1\frac{3}{\sqrt{10-6\cos\pi}} = \frac{3}{4}B_1.$$ **1 bod**

Graf:

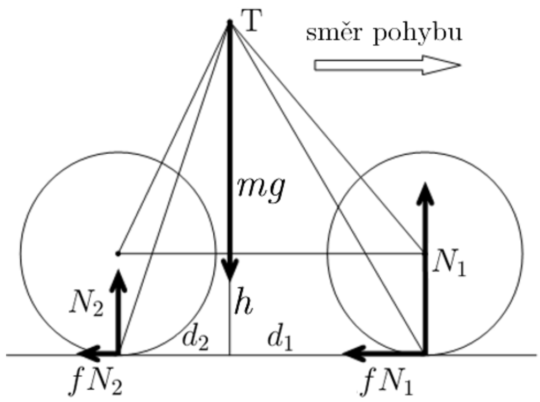


Obr. R4 **2 body**

3.a) Z kinematických rovnic rovnoměrně zpomaleného pohybu do zastavení plyne

$$s = \frac{v_0^2}{2a}. \tag{1}$$

2 body



Obr. R5

Na soustavu cyklisty s kolem působí v těžišti soustavy tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, v dotykových bodech na přední kolo reakce $\boldsymbol{N}_1$ vozovky a třecí síla o velikosti fN_1, na zadní kolo reakce $\boldsymbol{N}_2$ vozovky (při brzdění zadním kolem též třecí síla o velikosti fN_2). Ve svislém směru se soustava nepohybuje, výslednice sil působících na soustavu je nulová, ve vodorovném směru je výslednice nenulová a způsobuje brzdění. Proto platí:

$$N_1 + N_2 = mg,$$

$$ma_1 = fN_1.$$

Dále je výslednice všech momentů sil vzhledem k ose procházející těžištěm nulová:

$$N_1 d_1 = N_2 d_2 + fN_1 h. \tag{2}$$

Ze soustavy tří rovnic plyne

$$a_1 = \frac{fd_2}{d_1 + d_2 - fh} g.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2fg} \frac{d_1 + d_2 - fh}{d_2} = 13 \text{ m}.$$

3 body

b) Tentokrát platí rovnice

$$N_1 + N_2 = mg,$$

$$ma_2 = fN_2,$$

$$N_1 d_1 = N_2 d_2 + fN_2 h. \tag{3}$$

Ze soustavy plyne

$$a_2 = \frac{fd_1}{d_1 + d_2 + fh} g.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2fg}\frac{d_1 + d_2 + fh}{d_1} = 25\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

c) Při brzdění oběma brzdami se uplatní celá tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ kola s cyklistou. Cyklista brzdí se zrychlením

$$a = \frac{fN_1 + N_2}{m} = \frac{f(N_1 + N_2)}{m} = \frac{fmg}{m} = fg.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$s = \frac{v_0^2}{2fg} = 10\ \mathrm{m}.$$ **2 body**

d) Najdeme takovou intenzitu brzdění danou součinitelem f', při níž nastane podmínka pro přetočení cyklisty ve směru jízdy. Právě tehdy se veškerá tíhová síla přenese pouze na přední kolo. Pak velikost reakce vozovky na přední kolo bude $N_1 = mg$ a na zadní $N_2 = 0$.

Při brzdění pouze přední brzdou tyto hodnoty normálových reakcí dosadíme do rovnice (2):

$$mgd_1 = 0 \cdot d_2 + f'mgh \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{d_1}{h} = 0{,}59 > f.$$

Při brzdění pouze zadní brzdou tyto hodnoty normálových reakcí dosadíme do rovnice (3):

$$mgd_1 = 0 \cdot d_2 + f' \cdot 0 \cdot h.$$

Rovnice nemá řešení, tj. podmínka pro převrácení podle očekávání není splněna pro žádné f'.

Při brzdění oběma brzdami je z důvodu $N_2 = 0$ zadní brzda neúčinná a nastane situace jako při brzdění pouze přední brzdou.

2 body

Alternativní řešení d): Vztah (2) odpovídající brzdění jen předním kolem, můžeme přepsat do tvaru

$$d_1 - fh = \frac{N_2}{N_1}d_2.$$

Odtud je patrné, že aby mohla nastat rovnováha momentů sil, tj. nedošlo k přetočení cyklisty ve směru jízdy, musí vstupní parametry zadání splňovat podmínku $d_1 - fh \geq 0$. Pokud při splnění této podmínky budeme f zvětšovat, bude se zmenšovat $d_1 - fh$ a tedy i poměr $\frac{N_2}{N_1}$, tj. postupně se tíha přenáší především na přední kolo. Limitnímu případu, kdy $N_1 = mg$ a $N_2 = 0$, tj.

$$d_1 - f'h = \frac{N_2}{N_1}d_2 = 0\ ,$$

pak odpovídá limitní hodnota

$$f' = \frac{d_1}{h} = 0,59 > f.$$

4.a) Pro stavy 1 a 2 z důvodu přímé úměrnosti platí

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Ze stavové rovnice pro stavy 1 a 2

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

pak dostaneme

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{p_2^2}{p_1^2}. \tag{1}$$

Práce vykonaná plynem při kruhovém ději je rovna obsahu trojúhelníku:

$$W' = \frac{1}{2}\left(p_2 - p_3\right)\left(V_2 - V_1\right).$$

Za účelem vhodných poměrů v závorkách vytkneme p_1 z první a V_1 z druhé závorky

$$W' = \frac{1}{2} p_1 V_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_3}{p_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

Dále platí

$$p_1 V_1 = nRT_1, \quad V_3 = V_2,$$

$$T_3 = T_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_3}{p_1} = \frac{V_1}{V_3} = \frac{V_1}{V_2}.$$

Dosazením dostaneme

$$W' = \frac{1}{2} nRT_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

Pomocí vztahu (1) poměry tlaků a objemů nahradíme danými teplotami

$$W' = \frac{1}{2} nRT_1 \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right)\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1\right) = \frac{1}{2} nRT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right).$$

5 bodů

b) Pro stavy 1 a 3 z důvodu přímé úměrnosti platí

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{V_3}{V_1}.$$

Ze stavové rovnice pro stavy 1 a 3

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$$

pak dostaneme

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = \frac{V_3^2}{V_1^2} = \frac{p_3^2}{p_1^2}. \tag{2}$$

Práce vykonaná plynem při kruhovém ději je rovna obsahu lichoběžníku:

$$W' = \frac{1}{2}\left(p_2 - p_1 + p_2 - p_4\right)\left(V_3 - V_1\right) = \frac{1}{2}\left(2p_2 - p_4 - p_1\right)\left(V_3 - V_1\right).$$

Za účelem vhodných poměrů v závorkách vytkneme p_1 z první a V_1 z druhé závorky:

$$W' = \frac{1}{2}p_1V_1\left(2\frac{p_2}{p_1} - \frac{p_4}{p_1} - 1\right)\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right).$$

Dále platí

$$p_1V_1 = nRT_1, \quad p_2 = p_3, \quad V_4 = V_3,$$

$$T_1 = T_4 \quad \Rightarrow \quad p_1V_1 = p_4V_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_4}{p_1} = \frac{V_1}{V_4} = \frac{V_1}{V_3}.$$

Dosazením dostaneme

$$W' = \frac{1}{2}nRT_1\left(2\frac{p_3}{p_1} - \frac{V_1}{V_3} - 1\right)\left(\frac{V_3}{V_1} - 1\right).$$

Pomocí vztahu (2) poměry tlaků a objemů nahradíme danými teplotami

$$W' = \frac{1}{2}nRT_1\left(2\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{T_3}{T_1}} - 1\right).$$ **5 bodů**

5.a) Ze vztahu $P_{01} = \beta(t_{h1} - t_o)$ vyjádříme

$$\beta = \frac{P_{01}}{t_{h1} - t_o} = 10\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}}.$$ **1 bod**

b)

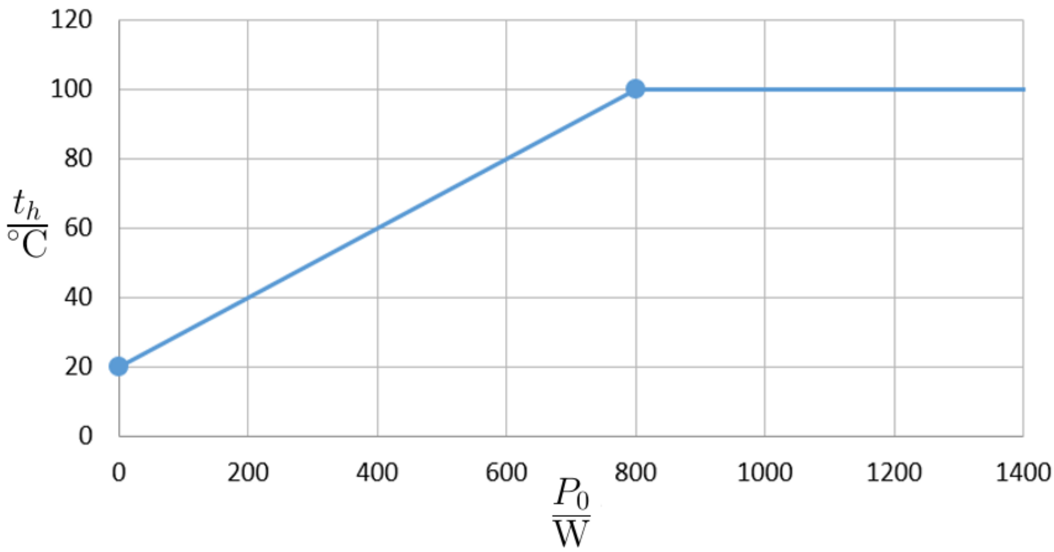
$$P_{0\,\mathrm{min}} = \beta\,(t_v - t_o) = 800\ \mathrm{W}.$$ **1 bod**

c)

$$t_h = \frac{P_0}{\beta} + t_0.$$

Z předcházejícího bodu řešení víme, že nejmenší výkon vařiče, při kterém se začne vařit voda (musí platit $t_h = t_v$), je $P_{0\,\mathrm{min}} = 800$ W. Dále ze zadání víme, že při nulovém výkonu vařiče pro teplotu hrnce platí $t_h = 20$ °C.

Graf:



Obr. R6

3 body

d) Podle ZZE se energie dodaná vařičem částečně využije k zahřátí soustavy, část jí uniká do okolí

$$P_{0\,\max}.\Delta\tau = C\Delta t + \beta\,(t - t_0)\,\Delta\tau \;\Rightarrow\quad \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P_{0\,\max}}{C} - \frac{\beta}{C}\,(t - t_0)$$

Rychlost změny teploty soustavy na počátku

$$v_0 = \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)_0 = \frac{P_{0\,\max}}{C} = 0{,}33\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}.$$

Rychlost změny teploty soustavy před dosažením bodu varu

$$v_v = \left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)_v = \frac{P_{0\,\max}}{C} - \frac{\beta}{C}\,(t_v - t_0) = 0{,}16\ \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}.$$

2 body

e) Kdyby byla závislost teploty soustavy na času lineární, měla by tvar

$$t = t_0 + v\tau \quad\Rightarrow\quad \tau = \frac{t - t_0}{v}\ ,$$

tedy v našem případě máme

$$\tau = \frac{t_v - t_0}{v} = \frac{80}{0{,}24} s \doteq 330\ \mathrm{s}.$$

Za rychlost změny teploty soustavy jsme dosadili průměrnou rychlost $v = \dfrac{v_o + v_v}{2}$.
Vařič za dobu τ_v dodal teplo $Q_v = P_{0\,\max}\cdot\tau_v = 500\ \mathrm{kJ}$.
Z toho na zahřívání $Q_z = C(t_v - t_0) = 360\ \mathrm{kJ}$.
Do okolí uniklo teplo $Q_0 = Q_v - Q_z = 140\ \mathrm{kJ}$.
V procentech to bude $\eta = \frac{Q_v - Q_z}{Q_v} = 28\ \%$.

3 body

7.a) Poměr hmotností hřídele a kola je

$$\frac{m_h}{m_k} = \frac{\pi r^2\cdot 3r}{\pi(2r)^2\cdot r} = \frac{3}{4}.$$

Hřídel má hmotnost $m_h = \frac{3}{7}M$, kolo $m_k = \frac{4}{7}M$.
Moment setrvačnosti kola na hřídeli je

$$J = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}M\cdot r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}M\cdot(2r)^2 = \frac{19}{14}Mr^2.$$

2 body

b) Na závaží působí tíhová síla $m_0\boldsymbol{g}$ a v opačném směru tahová síla $\boldsymbol{T}$ závěsu, účinkem jejich výslednice je rovnoměrně zrychlený pohyb závaží dolů. Na kolo působí závěs tahovou silou $-\boldsymbol{T}$, její moment způsobuje rovnoměrně zrychlený rotační pohyb kola na hřídeli s úhlovým zrychlením ε. Každý pohybový účinek vyjádříme pohybovými rovnicemi:

$$m_0 g - T = m_0 a,$$
$$T \cdot 2r = J\varepsilon.$$

Vyloučením tahové síly dostaneme

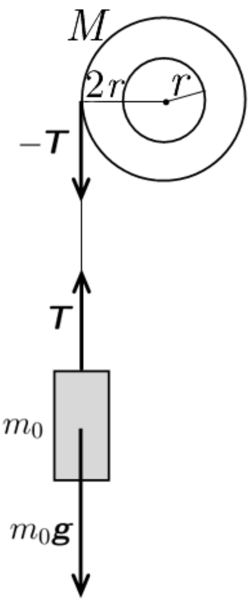
$$m_0 g = m_0 a + \frac{J\varepsilon}{2r}.$$

Dosazením momentu setrvačnosti a vazbové podmínky $\varepsilon = \frac{a}{2r}$ dostaneme

$$m_0 g = m_0 a + \frac{19}{14} M r^2 \cdot \frac{a}{4r^2}.$$

Z rovnice plyne

$$a = \frac{56 m_0}{19M + 56 m_0} g.$$

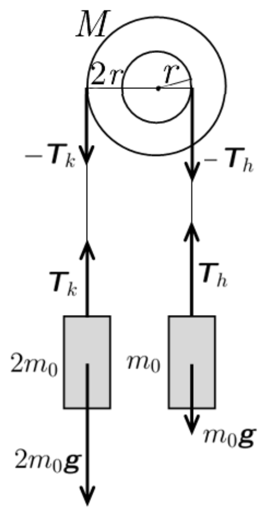


Obr. R7

4 body

c) Z podmínky rovnováhy v původní poloze plyne, že neznámá hmotnost závaží na hřídeli je $2m_0$. Po záměně (obr. R8) visí na kole závaží o hmotnosti $2m_0$ a na hřídeli závaží o hmotnosti m_0. Sestavíme tři pohybové rovnice, po jedné pro každé závaží a jednu pro kolo na hřídeli:

$$2m_0 g - T_k = 2m_0 a_k,$$
$$T_h - m_0 g = m_0 a_h,$$
$$T_k \cdot 2r - T_h r = J\varepsilon.$$



Obr. R8

Z první a druhé rovnice vyjádříme tahové síly a dosadíme do třetí rovnice:

$$(2m_0 g - 2m_0 a_k) \cdot 2r - (m_0 g + m_0 a_h)\, r = J\varepsilon.$$

Z vazbových podmínek

$$\varepsilon = \frac{a_k}{2r} = \frac{a_h}{r}$$

plyne

$$a_k = 2a_h.$$

Dosazením a úpravou dostaneme

$$-9 m_0 a_h r + 3 m_0 g r = \frac{19}{14} M r^2 \cdot \frac{a_h}{r},$$
$$a_h = \frac{42 m_0}{19M + 126 m_0} g,$$
$$a_k = 2a_h = \frac{84 m_0}{19M + 126 m_0} g.$$

4 body