Řešení úloh 1. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Úlohy navrhli R. Horáková (1), J. Jírů (3, 7), J. Thomas (2, 4, 5) a P. Šedivý (6)

1. Látkové množství kyslíku je

$$n = \frac{m}{M_m}$$

a $T_1 = 273$ K. Ze stavové rovnice určíme počáteční objem V_1:

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = \frac{mRT_1}{M_m p_1}.$$

2 body

Pro představu číselně vychází $V_1 = 7{,}1 \cdot 10^{-3}$ m^3.

a) Izobarická komprese:

$$p_2 = p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = \frac{M_m p_1 V_2}{mR} = 92 \text{ K},$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\left(p_1 V_2 - \frac{mRT_1}{M_m}\right) = -1\,200 \text{ J}.$$

3 body

b) Izotermická komprese:

$$T_2 = T_1 = 273 \text{ K}, \ \Delta U = 0 \text{ J},$$

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{mRT_1}{V_2 M_m} = 3{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

2 body

c) Adiabatická komprese:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = p_1 \left(\frac{mRT_1}{p_1 M_m V_2}\right)^{\kappa} = 4{,}6 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{p_1 \left(\frac{mRT_1}{p_1 M_m V_2}\right)^{\kappa} V_2}{nR} = T_1 \left(\frac{mRT_1}{p_1 M_m V_2}\right)^{\kappa - 1} = 420 \text{ K},$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{5}{2}\frac{m}{M_m} RT_1 \left[\left(\frac{mRT_1}{p_1 M_m V_2}\right)^{\kappa - 1} - 1\right] = 960 \text{ J}.$$

3 body

2. a) Objem krychlové nádoby z oceli se zvětší na

$$V_1 = l_0^3 (1 + 3\alpha_{\text{ocel}} \Delta t) = 0{,}513 \text{ m}^3.$$

2 body

b) Zahřátím se zvětší i objem železných a měděných částí uvnitř nádoby:

$$V_{\mathrm{Fe}} = \frac{m_{\mathrm{Fe}}}{\rho_{\mathrm{Fe}}}(1 + 3\alpha_{\mathrm{Fe}}\Delta t) = 0{,}127\ \mathrm{m}^3.$$

2 body

$$V_{\mathrm{Cu}} = \frac{m_{\mathrm{Cu}}}{\rho_{\mathrm{Cu}}}(1 + 3\alpha_{\mathrm{Cu}}\Delta t) = 0{,}112\ \mathrm{m}^3.$$

2 body

c) Za provozu se zvětší i objem samotného oleje na

$$V_{1\mathrm{olej}} = V_{0\mathrm{olej}}(1 + \beta_{\mathrm{olej}}\Delta t).$$

Potřebný objem oleje za provozní teploty $V_{1\mathrm{olej}}$ je roven 90 % objemu nádoby po zahřátí, musíme ale odečíst objemy železných a měděných částí po zahřátí

$$V_{1\mathrm{olej}} = 0,9V_1 - V_{\mathrm{Fe}} - V_{\mathrm{Cu}}.$$

Před zapojením transformátoru musíme tedy nalít

$$V_{0\mathrm{olej}} = \frac{V_{1\mathrm{olej}}}{1 + \beta_{\mathrm{olej}}\Delta t} = \frac{0,9V_1 - V_{\mathrm{Fe}} - V_{\mathrm{Cu}}}{1 + \beta_{\mathrm{olej}}\Delta t} = 0{,}214\ \mathrm{m}^3 = 214\ \mathrm{l\ oleje}.$$

2 body

Před ponořením kovových částí bude toto množství oleje sahat do výšky

$$h_1 = \frac{V_{0\mathrm{olej}}}{l_0^2} = 33{,}4\ \mathrm{cm}.$$

Po ponoření kovových částí to bude do výšky

$$h_2 = \frac{V_{0\mathrm{olej}} + \dfrac{m_{\mathrm{Fe}}}{\rho_{\mathrm{Fe}}} + \dfrac{m_{\mathrm{Cu}}}{\rho_{\mathrm{Cu}}}}{l_0^2} = 70{,}8\ \mathrm{cm}.$$

2 body

Zkouška: Za provozní teploty bude olej sahat do výšky

$$h_3 = \frac{V_{1\mathrm{olej}} + V_{\mathrm{Fe}} + V_{\mathrm{Cu}}}{l_1^2} = \frac{0,9V_1}{l_0^2(1 + 2\alpha_{\mathrm{ocel}}\Delta t)} = 72{,}1\ \mathrm{cm},$$

tedy do devíti desetin výšky nádoby.

3.a) Z grafu jako obsah plochy pod grafem zjistíme dráhu kabiny, tedy konečnou výšku $h = 64$ m. Potenciální energie kabiny je

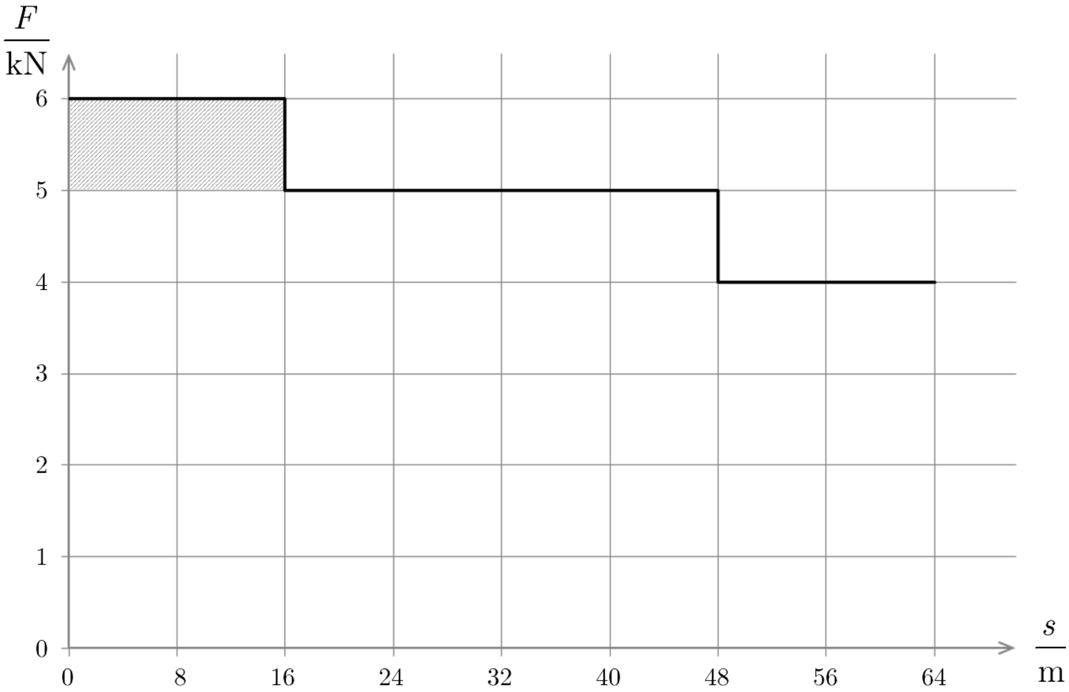
$$E_p = mgh = 320\ \mathrm{kJ}.$$

2 body

b) Pohyb kabiny je v první fázi rovnoměrně zrychlený, v druhé rovnoměrný a v třetí rovnoměrně zpomalený. Velikost zrychlení během zrychlování i během zpomalování je stejná a má hodnotu, kterou určíme z grafu

$$a = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{8}{4}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

V první fázi pohybu je tahová síla lana $F_1 = m(g + a) = 6,0$ kN, v druhé fázi $F_2 = mg = 5,0$ kN a ve třetí $F_1 = m(g - a) = 4,0$ kN.



Obr. R1

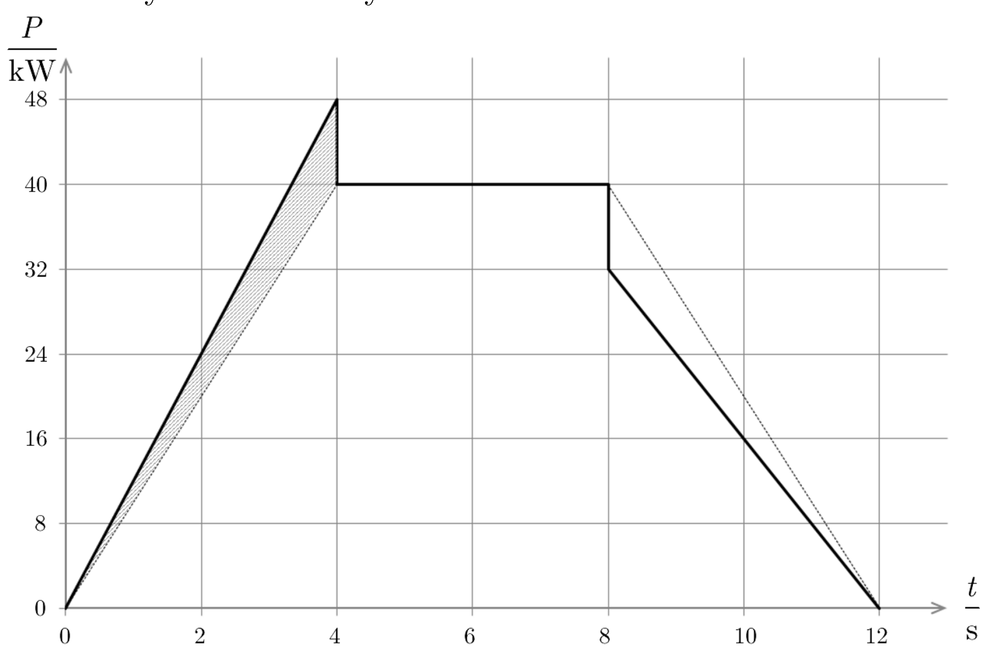
2 body

c) Okamžitý výkon tahové síly je podle vztahu $P = Fv$ při konstantní síle přímo úměrný okamžité rychlosti.

V první fázi je v nulovém čase nulová rychlost, a tedy nulový výkon. Při konečné maximální rychlosti v_m je okamžitý výkon $P_1 = F_1 v_m = m(g + a)v_m = 48$ kW.

V druhé fázi je okamžitý výkon konstantní $P_2 = F_2 v_m = mgv_m = 40$ kW.

V třetí fázi je počáteční výkon $P_3 = F_3 v_m = m(g - a)v_m = 32$ kW a konečný při dosažení nulové rychlosti nulový.



Obr. R2

2 body

d) V obou grafech je práce rovna obsahu plochy pod grafem.

$W = W_1 + W_2 + W_3 = 6\ \text{kN}\cdot 16\ \text{m} + 5\ \text{kN}\cdot(48-16)\ \text{m} + 4\ \text{kN}\cdot(64-48)\ \text{m} = 320\ \text{kJ}$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{48(4-0)}{2}\ \text{kJ} + 40(8-4)\ \text{kJ} + \frac{32(12-8)}{2}\ \text{kJ} = 320\ \text{kJ}$$

Vykonaná práce je rovna získané potenciální energii spočtené v části a).

2 body

e) Při urychlování část vykonané práce připadne na získanou kinetickou energii, při zpomalování se tato kinetická energie přemění na část celkové potenciální energie. Kinetická energie je v grafech znázorněna vyšrafovanou plochou:

$$E_k = (6-5)\ \text{kN}\cdot 16\ \text{m} = 16\ \text{kJ},$$

$$E_k = \frac{(48-40)\ \text{kW}\cdot 4\ \text{s}}{2} = 16\ \text{kJ}.$$

2 body

4.a) Protože mají nádoby stejnou šířku, objem kapalin je stejný a poměr délek je 4 : 5, musí být i poměr výšek $\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$. Rozdíl výšek $h_1 - h_2$ je stejný jako rozdíl hloubek, do kterých se ponořily splávky v nádobách. Jedna třetina délky splávku je tedy rovna rozdílu výšek hladin v nádobách:

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{3}d = \frac{1}{5}h_1 = \frac{1}{4}h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{5}{3}d = 20{,}0\ \text{cm},\ h_2 = \frac{4}{3}d = 16{,}0\ \text{cm}.$$

2 body

b) Označme V objem splávku. Levý splávek působí na páku výslednou sílou $F_1 = V\rho g - \frac{2}{3}V\rho_1 g$, pravý splávek silou $F_2 = V\rho g - \frac{1}{3}V\rho_2 g$. Z rovnováhy na páce víme, že velikosti těchto sil jsou v poměru $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$. Platí tedy:

$$2\left(V\rho g - \frac{2}{3}V\rho_1 g\right) = V\rho g - \frac{1}{3}V\rho_2 g \quad \Rightarrow \quad 3\rho = 4\rho_1 - \rho_2.$$

2 body

Síla, která působí kapalina na boční stěnu nádoby, závisí na hloubce a na velikosti boční stěny. Podle zadání je velikost tlakové síly v obou nádobách stejná. Označíme-li F velikost tlakové síly a c šířku nádob, platí

$$F = \frac{1}{2}h_1\rho_1 g c h_1 = \frac{1}{2}h_2\rho_2 g c h_2 \quad \Rightarrow \quad h_1^2\rho_1 = h_2^2\rho_2.$$

2 body

Ze soustavy rovnic dostaneme

$$\rho_1 = \frac{16}{13}\rho = 1{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$\rho_2 = \frac{25}{13}\rho = 1{,}9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}.$$

2 body

c) Hledaný poměr je

$$\frac{F_1 + F_2}{2V\rho g} = \frac{V\rho g - \frac{2}{3}V\rho_1 g + V\rho g - \frac{1}{3}V\rho_2 g}{2V\rho g} = \frac{2\rho - \frac{2}{3}\rho_1 - \frac{1}{3}\rho_2}{2\rho},$$

$$\frac{F_1 + F_2}{2V\rho g} = \frac{2\rho - \frac{2}{3}\frac{16}{13}\rho - \frac{1}{3}\frac{25}{13}\rho}{2\rho} = \frac{21}{78}.$$

2 body

5. Zvolme pravoúhlou soustavu souřadnic Oxy, v níž místo vrhu oříšku má souřadnice $x = 0, y = h$ a borovice vyrůstá ze země v místě o souřadnicích $x = l, y = 0$.

a) Z rovnic vodorovného vrhu $x = vt, y = h - \frac{1}{2}gt^2$ dostaneme vyloučením času rovnici trajektorie $y = h - \frac{g}{2v^2}x^2$.
Volbou souřadnic místa dopadu oříšku $x = l, y = 0$ dostaneme rovnici

$$0 = h - \frac{gl^2}{2v^2} \quad \Rightarrow \quad v = l\sqrt{\frac{g}{2h}} = 9{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2 body

b) Z rovnic vodorovného vrhu položením $y = 0$ získáme čas $t = t_1$ dopadu oříšku na zem

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Pro pohyb veverky a pro průmět pohybu oříšku do vodorovného směru platí

$$l = v_1 t_1 + u_1 t_1.$$

Z rovnice plyne

$$u_1 = \frac{l - v_1 t_1}{t_1} = \frac{l}{t_1} - v_1 = l\sqrt{\frac{g}{2h}} - v_1 = 3{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2 body

Alternativní řešení úvahou s využitím výsledku a): V situaci a) úbytek počáteční rychlosti oříšku nahradíme rychlostí veverky:

$$u_1 = v - v_1 = l\sqrt{\frac{g}{2h}} - v_1.$$

c) V rovnici trajektorie $y = h - \frac{g}{2v_2^2}x^2$ položíme $x = l, y = h_2$ a dostaneme

$$h_2 = h - \frac{gl^2}{2v_2^2} = 4{,}4\ \mathrm{m}.$$

Za dobu letu oříšku $t_2 = \frac{l}{v_2}$ musí veverka rovnoměrným pohybem dosáhnout výšky h_2, její rychlost musí být

$$u_2 = \frac{h_2}{t_2} = \frac{h_2 v_2}{l} = \frac{\left(h - \dfrac{gl^2}{2v_2^2}\right)v_2}{l} = \frac{hv_2}{l} - \frac{gl}{2v_2} = 2{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3 body

d) Z rovnic šikmého vrhu $x = v_3 t\cos\alpha, y = h + v_3 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ dostaneme vyloučením času rovnici trajektorie

$$y = h + x\tan\alpha - \frac{g}{2v_3^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Volbou souřadnic místa dopadu oříšku $x = l, y = 0$ dostaneme rovnici

$$0 = h + l\tan\alpha - \frac{gl^2}{2v_3^2\cos^2\alpha}.$$

Z rovnice plyne

$$v_3 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + l\tan\alpha)}} = 8{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

3 body

7.a) Představme si plný homogenní válec, který rozložíme na daný dutý válec a na vnitřní plný válec. Označme ρ hustotu materiálu válce a h výšku válce a m hmotnost vnitřního válce. Moment setrvačnosti dutého válce určíme jako rozdíl momentů setrvačností plných válců velkého a vnitřního:

$$J = \frac{1}{2}(M + m)R^2 - \frac{1}{2}mr^2.$$

Hmotnost vnitřního válce je

$$m = \frac{\rho\pi r^2 h}{\rho\pi R^2 h - \rho\pi r^2 h}M = \frac{r^2}{R^2 - r^2}M = \frac{\left(\frac{2}{3}R\right)^2}{R^2 - \left(\frac{2}{3}R\right)^2}M = \frac{4}{5}M.$$

Dosazením dostaneme

$$J = \frac{1}{2}\left(M + \frac{4}{5}M\right)R^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}M\cdot\frac{4}{9}R^2 = \frac{13}{18}MR^2.$$

4 body

b) Při neprokluzování je splněna vazbová podmínka $v = R\omega$. Válec má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{18}MR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{31}{36}Mv^2.$$

2 body

c) Válec se pohybuje z klidu rovnoměrně zrychleným pohybem bez prokluzování. Ze vztahů pro rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb

$$s = \frac{1}{2}at^2, v = at.$$

Vyloučením času dostaneme

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Při sjetí válce z výšky $h = s\sin\alpha$ pak ze zákona zachování mechanické energie

$$Mgh = \frac{31}{36}Mv^2$$

plyne

$$v^2 = \frac{36}{31}gh = \frac{36}{31}gs\sin\alpha.$$

Dosazením do vztahu pro zrychlení dostaneme

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\frac{36}{31}gs\sin\alpha}{2s} = \frac{18}{31}g\sin\alpha.$$

4 body

Alternativní řešení části c): Na válec působí ve směru nakloněné roviny dvě síly s pohybovým účinkem. V těžišti válce působí tečná složka tíhové síly o velikosti $F_{Gt} = Mg\sin\alpha$ a ve středu stykové úsečky tečná složka reakce nakloněné roviny o velikosti T. Jejich výslednice určuje velikost zrychlení a posuvného pohybu těžiště válce, moment síly T pak určuje úhlové zrychlení ε rotačního pohybu válce kolem osy procházející těžištěm. Účinky popisují pohybové rovnice translačního a rotačního pohybu válce:

$$Mg\sin\alpha - T = Ma,$$

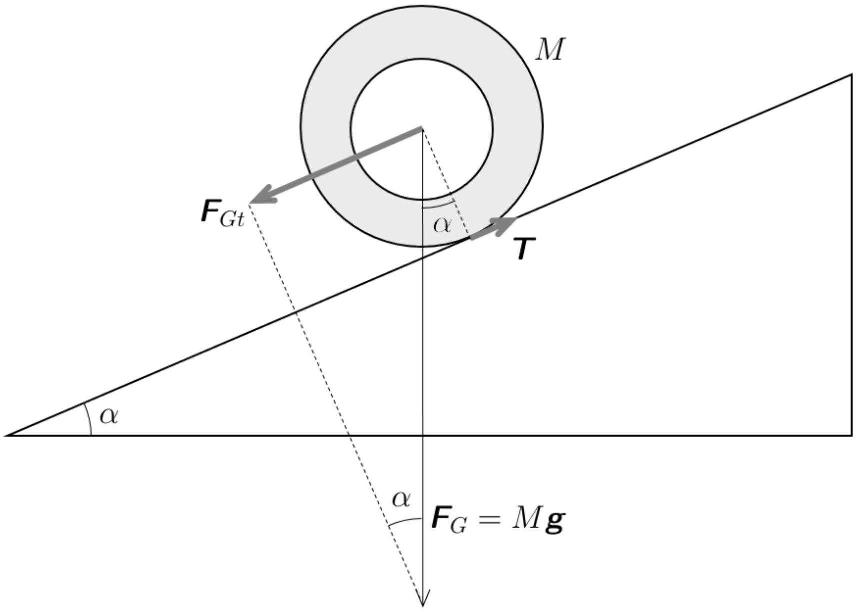
$$TR = J\varepsilon.$$

Z rovnic vyloučíme sílu T:

$$Mg\sin\alpha - J\frac{\varepsilon}{R} = Ma.$$

Dosazením momentu setrvačnosti a vazbové podmínky $a = \varepsilon R$ pro neprokluzování dostaneme

$$Mg\sin\alpha - \frac{13}{18}MR^2\cdot\frac{a}{R^2} = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{18}{31}g\sin\alpha.$$



M
$\boldsymbol{F}_{Gt}$
α
$\boldsymbol{T}$
α
α
$\boldsymbol{F}_G = M\boldsymbol{g}$

Obr. R3