Řešení úloh 2. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Úlohy navrhli R. Horáková (1, 3), J. Nahodil (3) a J. Jírů (2, 4)

1. a) Plyn nekoná práci vzhledem k okolí a nachází se v tepelně izolované nádobě. Celková vnitřní energie se tedy nezmění.

$$\frac{3}{2}n_1RT_1 + \frac{3}{2}n_2RT_2 = \frac{3}{2}(n_1+n_2)RT \quad\Rightarrow\quad T = \frac{n_1T_1+n_2T_2}{n_1+n_2} = 340\ \mathrm{K}.$$

3 body

b) Podle stavové rovnice po ustálení rovnováhy

$$p{\cdot}3V = (n_1+n_2)RT = R(n_1T_1+n_2T_2) \quad\Rightarrow\quad V = \frac{R(n_1T_1+n_2T_2)}{3p} = 0{,}87\ \mathrm{m}^3.$$

3 body

c) Podle stavové rovnice

$$p_1 = \frac{n_1RT_1}{V} = \frac{3pn_1T_1}{n_1T_1+n_2T_2} = 7{,}6\ \mathrm{kPa},$$

2 body

$$p_2 = \frac{n_2RT_2}{2V} = \frac{3pn_2T_2}{2(n_1T_1+n_2T_2)} = 4{,}3\ \mathrm{kPa}.$$

2 body

2. a) Označíme-li t dobu letu koule pod sítí, pak doba letu nad sítí je $2t$. Pro let nad sítí platí rovnice

$$\frac{h_0}{2} = \frac{1}{2}g(2t)^2,$$

z níž dostaneme

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h_0}{g}}. \tag{1}$$

Celková doba letu koule je

$$T = 3t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{h_0}{g}}.$$

Doba volného pádu koule z výšky h_0 je

$$T_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Dosazením dostaneme hledaný poměr

$$k = \frac{T}{T_0} = \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1{,}06.$$

4 body

b) Označíme-li v_0 velikost rychlosti koule bezprostředně po protržení sítě, pak z porovnání drah

$$\frac{1}{2}g(2t)^2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

plyne

$$v_0 = \frac{3}{2}gt.$$

Po dosazení vztahu (1) dostaneme

$$v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{gh_0}.$$

Práce nutná k protržení sítě je

$$W = mg\frac{h_0}{2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\frac{h_0}{2} - \frac{1}{2}m \cdot \frac{9}{16}gh_0 = \frac{7}{32}mgh_0.$$

3 body

c) Kinetická energie těsně před dopadem je rovna počáteční potenciální energii zmenšené o práci nutnou k protržení sítě:

$$\frac{1}{2}mv_d^2 = mgh_0 - W.$$

Užitím výsledku b) po úpravě dostaneme

$$v_d = \frac{5}{4}\sqrt{gh_0}.$$

3 body

3.a) Při zvýšení teploty kolejnic z teploty t na teplotu t_2 se kolejnice protáhne o délku Δl_1:

$$\Delta l_1 = l\alpha(t_2 - t) = 8{,}4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Mezera mezi kolejnicemi musela být 8,4 mm.

2 body

b) Při snížení teploty na $t_1 = -\ 30\ °\mathrm{C}$ se kolejnice zkrátí o délku $\Delta l_2 = l\alpha\,(t - t_1)$, celková mezera mezi kolejnicemi při největším mrazu je Δl:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l\alpha\,(t_2 - t_1) = 1{,}9 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

Při největších mrazech je mezi kolejnicemi mezera 1,9 cm.

2 body

c) Při snížení teploty na $t_0 = 0\ °\mathrm{C}$ se kolejnice zkrátí o délku $\Delta l_3 = l\alpha\,(t - t_0)$, celková mezera mezi kolejnicemi při teplotě t_0 je $\Delta l'$:

$$\Delta l' = \Delta l_1 + \Delta l_3 = l\alpha\,(t_2 - t_0)\,,$$

počet kolejnic na uvedené trati je $N = s/l$, tedy celková délka mezer je

$$\Delta L = \frac{sl\alpha\,(t_2 - t_0)}{l} = s\alpha\,(t_2 - t_0) = 98\ \mathrm{m}.$$

Celková délka mezer na trati Praha – Česká Třebová byla 98 m.

2 body

d) Při teplotě 50 °C se kolejnice prodlouží o délku Δl_1. Mechanické napětí, které zabrání tomuto prodloužení má charakter tlaku a jeho velikost je

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = E\frac{\Delta l_1}{l} = \frac{El\alpha\,(t_2 - t)}{l} = E\alpha\,(t_2 - t) = 8{,}8 \cdot 10^7\ \mathrm{Pa}.$$

Při teplotě – 30 °C se kolejnice zkrátí o délku Δl_2. Mechanické napětí, které zabrání tomuto zkrácení, je

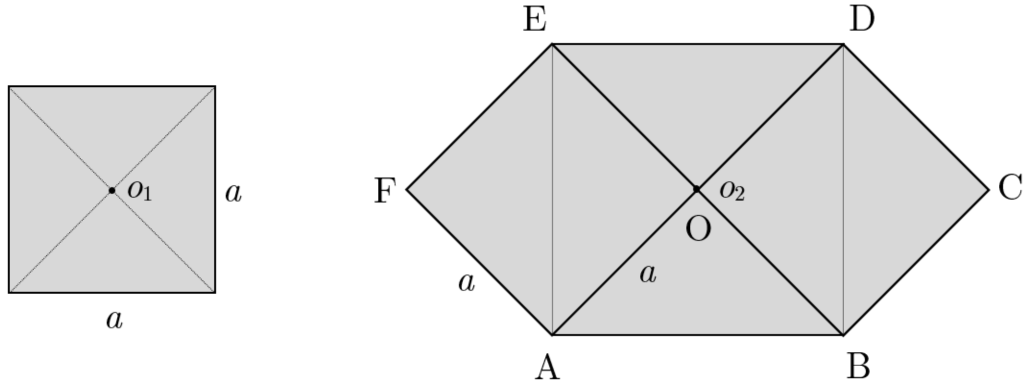
$$\sigma_2 = E\varepsilon_2 = E\frac{\Delta l_2}{l} = \frac{El\alpha\,(t - t_1)}{l} = E\alpha\,(t - t_1) = 1{,}1 \cdot 10^8\ \mathrm{Pa}.$$

Při teplotě 50 °C je kolejnice namáhána tlakem 88 MPa, při teplotě – 30 °C je namáhána tahem s mechanickým napětím 110 MPa.

4 body

4.a) Každý vrchol čtvercové desky obíhá po kružnici o poloměru

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Obr. R1

Úhlová rychlost rotace desky je

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2}\frac{v}{a}.$$

Deska se otáčí s kinetickou energií

$$E_k = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}ma^2 \cdot \left(\sqrt{2}\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{6}mv^2.$$

2 body

b) Druhá deska má hmotnost $3m$, lze ji rozdělit na tři původní čtvercové desky, z nichž jednu úhlopříčně rozpůlíme. Každá ze dvou nedělených čtvercových desek AOEF a BCDO má podle Steinerovy věty vzhledem k ose o_2 moment setrvačnosti

$$J' = \frac{1}{6}ma^2 + m \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{2}{3}ma^2.$$

Nyní uvažujme čtvercovou desku ABDE s délkou hrany $\sqrt{2}a$ a o hmotnosti $2m$.

Její moment setrvačnosti vzhledem k ose o_2 je

$$J'' = \frac{1}{6} \cdot 2m \cdot \left(\sqrt{2}a\right)^2 = \frac{2}{3} ma^2.$$

Vyjmeme-li z ní dva protilehlé pravoúhlé trojúhelníky AOE a DOB, pak zbývající dva pravoúhlé trojúhelníky tvoří doplněk do kompletní desky. Jejich moment setrvačnosti je $\dfrac{J''}{2}$.

Deska má moment setrvačnosti

$$J_2 = 2J' + \frac{J''}{2} = \frac{5}{3} ma^2$$

5 bodů

c) Do rovnosti kinetických energií

$$\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

dosadíme příslušné vztahy:

$$\frac{1}{6} ma^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{5}{3} ma^2 \cdot \frac{4\pi^2}{T_2^2}.$$

Z rovnice plyne

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{10}.$$

3 body