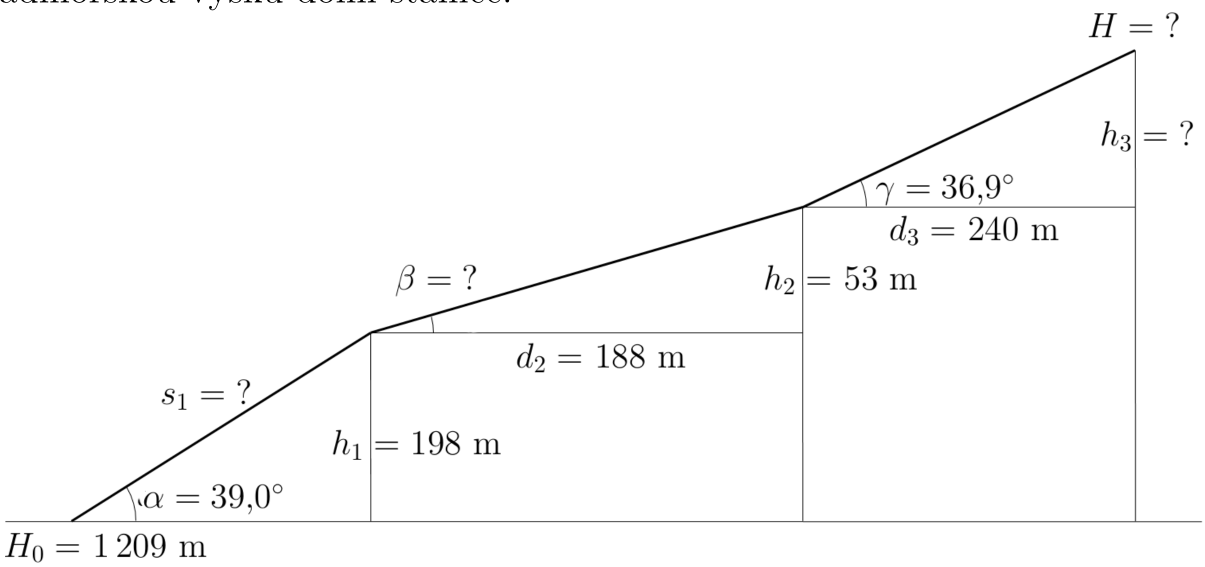
Řešení úloh 1. kola 65. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Úlohy navrhli J. Flajšar (1), J. Jírů (2–7)

1.a) Označme na prvním úseku $\alpha = 39{,}0°$, $h_1 = 198$ m, na druhém $d_2 = 188$ m, $h_2 = 53$ m a na třetím $d_3 = 240$ m, $\gamma = 36{,}9°$. Dále označme $H_0 = 1\,209$ m nadmořskou výšku dolní stanice.



Obr. R1

Na prvním úseku pro hledanou dráhu s_1 platí:

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{h_1}{\sin\alpha} = 315 \text{ m}.$$

Na druhém úseku pro hledaný úhel β platí:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h_2}{d_2} = \frac{53}{188} \quad \Rightarrow \quad \beta = 15{,}7°.$$

Na třetím úseku pro hledanou výšku h_3 platí:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{h_3}{d_3} \quad \Rightarrow \quad h_3 = d_3 \operatorname{tg}\gamma = 180 \text{ m}.$$

Nadmořská výška H horní stanice pak je

$$H = H_0 + h_1 + h_2 + h_3 = 1\,640 \text{ m}.$$

4 body

b) Plošina výtahu ujede na druhém úseku dráhu

$$s_2 = \sqrt{d_2^2 + h_2^2} = 195 \text{ m}.$$

Pro dráhu s_3 třetího úseku platí

$$\cos\gamma = \frac{d_3}{s_3} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \frac{d_3}{\cos\gamma} = 300 \text{ m},$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 810 \text{ m}.$$

Označme $v = 10{,}8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 3{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ rychlost plošiny. Doba jedné jízdy pak je

$$t = \frac{s}{v} = 270 \text{ s} = 4 \text{ min } 30 \text{ s}.$$

3 body

c) Počty schodů na jednotlivých úsecích je:

$$n_1 = \frac{198\ \text{m}}{0{,}16\ \text{m}} = 1\,238,$$

$$n_2 = \frac{53\ \text{m}}{0{,}1\ \text{m}} = 530,$$

$$n_3 = \frac{180\ \text{m}}{0{,}16\ \text{m}} = 1\,125.$$

Celkový počet schodů je

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 2\ 893 \doteq 2\,900.$$

Celkem musí opravář vyjít přibližně 2 900 schodů. **3 body**

2.a) Označme s dráhu jednoho úseku. Pak známý Pavlův čas můžeme vyjádřit jako

$$t_0 = \frac{2s}{v_p} = 3\,000\ \text{s}.$$

Olda dosáhl celkového času

$$t = \frac{s}{0,8v_p} + \frac{s}{1{,}25v_p} = \frac{s}{v_p}\left(\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{1{,}25}\right) = \frac{41}{20}\frac{s}{v_p} = \frac{41}{40}\frac{2s}{v_p} = \frac{41}{40}t_0 = 3\,075\ \text{s}.$$

To znamená, že kratší čas měl Pavel, a to o 75 s. **3 body**

b) Označme nejprve hledanou rychlost k-násobkem rychlosti v_p. Požadovanou rovnost časů vyjádříme rovnicí

$$\frac{s}{0{,}8v_p} + \frac{s}{kv_p} = \frac{2s}{v_p},$$

neboli

$$\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{k} = 2.$$

Z rovnice plyne $k = \frac{4}{3}$. To znamená, že Oldova rychlost musí být větší přibližně o 33 %. **3 body**

c) Pro danou dráhu $s = 10{,}00$ km je Pavlova celková průměrná rychlost

$$v_p = \frac{2s}{t_0} = \frac{2 \cdot 10\ \text{km}}{\frac{5}{6}\ \text{h}} = 24{,}0\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Průměrné Oldovy rychlosti pak jsou

$$v_{\text{p1}} = 0,8v_p = 19,2\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1},$$

$$v_{\text{p2}} = 1{,}25v_p = 30{,}0\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Jeho celková průměrná rychlost je

$$v_p' = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 10\ 000\ \text{m}}{3\ 075\ \text{s}} = 6{,}50\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 23{,}4\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}.$$ **4 body**

3.a) Pohyb automobilu je rovnoměrně zpomalený. Označíme-li m hmotnost automobilu a F velikost brzdné síly, pak pro velikost jeho zrychlení platí

$$a = \frac{F}{m} = \frac{fmg}{m} = fg = 5{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Dobu brzdění a brzdnou dráhu dostaneme z kinematických rovnic:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{fg} = 3{,}1 \text{ s},$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2}v_0 t = \frac{1}{2}v_0 \cdot \frac{v_0}{fg} = \frac{v_0^2}{2fg} = 26 \text{ m}.$$

3 body

b) Podle a) je brzdná dráha pro jednotlivé počáteční rychlosti dána funkčními vztahy

$$s_1(f) = \frac{v_1^2}{2fg},$$

$$s_2(f) = \frac{v_2^2}{2fg},$$

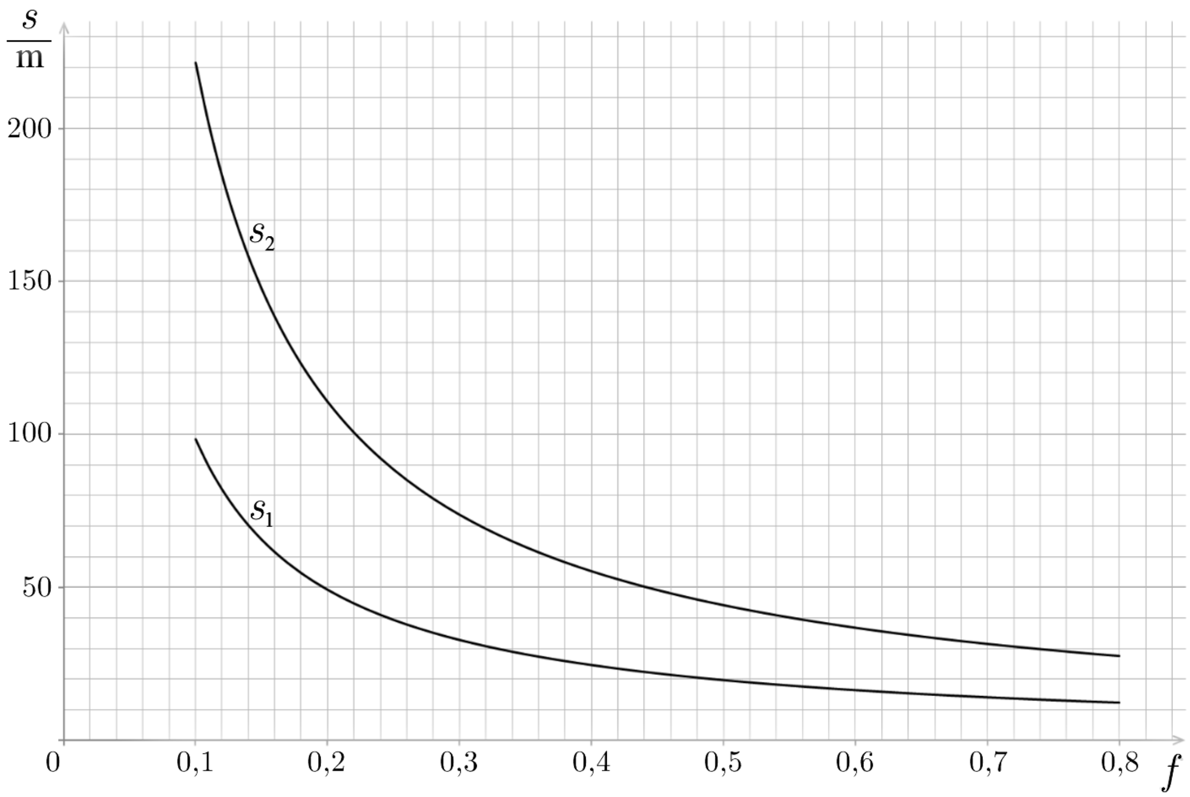
v nichž veličina f je proměnná. Číselně dostáváme

$$s_1(f) = \frac{9{,}842}{f} \text{ m},$$

$$s_2(f) = \frac{22,14}{f} \text{ m}.$$

f	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\frac{s_1}{\text{m}}$	98,4	49,2	32,8	24,6	19,7	16,4	14,0	12,3
$\frac{s_2}{\text{m}}$	221	111	73,8	55,4	44,3	36,9	31,6	27,7

Funkční závislostí je nepřímá úměrnost a grafem hyperbola.



Obr. R2

7 bodů

4.a) Z rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu

$$v_1 = at,\ s = \frac{1}{2}at^2$$

vyloučením času dostaneme

$$s = \frac{1}{2}a\left(\frac{v_1}{a}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2a},$$

kde zrychlení je

$$a = \frac{2F_1}{m}. \tag{1}$$

Dosazením dostaneme

$$s = \frac{mv_1^2}{4F_1} = \frac{220\ 000 \cdot \left(\frac{290}{3{,}6}\right)^2}{4 \cdot 300\ 000}\ \mathrm{m} = 1\ 200\ \mathrm{m}.$$

3 body

b) Průměrný výkon tahových sil je

$$\overline{P} = \frac{E_k}{t} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{v_1}{a}} = \frac{mv_1a}{2}.$$

Užitím vztahu (1) dostaneme

$$\overline{P} = \frac{mv_1}{2}\cdot a = \frac{mv_1}{2}\cdot\frac{2F_1}{m} = F_1v_1 = 300\,000 \cdot \frac{290}{3{,}6}\ \mathrm{W}\ = 24\ \mathrm{MW}.$$

3 body

c) Práci vykonanou motory lze vyjádříme pomocí mechanické energie

$$W = mgh + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{m\left(2gh + v_2^2\right)}{2}.$$

a pomocí výkonu

$$W = \overline{P}T = F_1v_1T.$$

Z rovnosti získaných výrazů plyne

$$T = \frac{m\left(2gh + v_2^2\right)}{2F_1v_1} = \frac{220\,000\left(2\cdot 9{,}81\cdot 11\,500 + \left(\frac{870}{3{,}6}\right)^2\right)}{2\cdot 300\,000\cdot\frac{290}{3{,}6}}\ \mathrm{s} = 22\ \mathrm{min}.$$

4 body

5.a) Soustava tvoří páku. Porovnáním momentů tíhových sil kuliček dostaneme

$$mg\cdot 2r < 3mg\cdot r.$$

To znamená, že rovnováha je porušena a soustava se uvede do otáčivého pohybu ve směru hodinových ručiček. **1 bod**

(Po otočení o 180° se zastaví, začne se otáčet zpět do původní polohy a tento děj se opakuje; ve skutečnosti se vlivem třecích a odporových sil úhel otočení postupně zmenšuje, až kmity zaniknou.)

b) Podle zákona zachování mechanické energie se během otočení do svislého směru potenciální energie druhé kuličky přeměnila na potenciální energii první kuličky a na kinetickou energii obou kuliček:

$$3mgr = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_2^2. \tag{1}$$

Úpravou dostaneme

$$2gr = v_1^2 + 3v_2^2.$$

Kuličky mají stejnou úhlovou rychlost, ale různou obvodovou rychlost. Pro úhlovou rychlost ω ve svislé poloze platí

$$\omega = \frac{v_1}{2r} = \frac{v_2}{r} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2.$$

Ze vztahů plyne

$$v_1 = \sqrt{\frac{8}{7}gr},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{7}gr}.$$

3 body

c) Vztah (1) lze zapsat ve tvaru

$$3mgr = mg \cdot 2r + E_k,$$

z něhož plyne

$$E_k = mgr.$$

2 body

Alternativně lze využít obvodové rychlosti:

$$E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{8}{7}gr + \frac{3}{2}m \cdot \frac{2}{7}gr = \frac{4}{7}mgr + \frac{3}{7}mgr = mgr.$$

d) Na osu působí svisle dolů tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ obou kuliček, odstředivá síla $\boldsymbol{F}_{o1}$ první kuličky ve směru svisle nahoru a odstředivá síla $\boldsymbol{F}_{o2}$ druhé kuličky ve směru svisle dolů. Složením uvedených sil dostaneme výslednici

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_{o1} + \boldsymbol{F}_{o2}.$$

Velikost tíhové síly je

$$F_G = mg + 3mg = 4mg.$$

Pro velikosti odstředivých sil platí

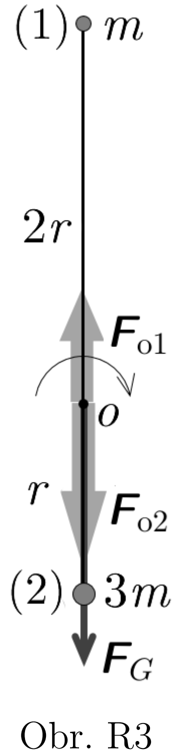
$$F_{o1} = \frac{mv_1^2}{2r} = \frac{m}{2r} \cdot \frac{8}{7}gr = \frac{4}{7}mg,$$

$$F_{o2} = \frac{3mv_2^2}{r} = \frac{3m}{r} \cdot \frac{2}{7}gr = \frac{6}{7}mg.$$

Velikost výsledné síly působící na osu otáčení je

$$F = F_G - F_{o1} + F_{o2} = 4mg - \frac{4}{7}mg + \frac{6}{7}mg = \frac{30}{7}mg.$$

4 body



Obr. R3

6. 1) Nalezení polohy těžiště.

2) Ověření závislosti periody na úhlové výchylce. **1 bod**

3) Měřeno 10 period:

Číslo měření	1	2	3	4	5	6
r/cm	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2
T/s	1,127	1,124	1,131	1,129	1,119	1,118

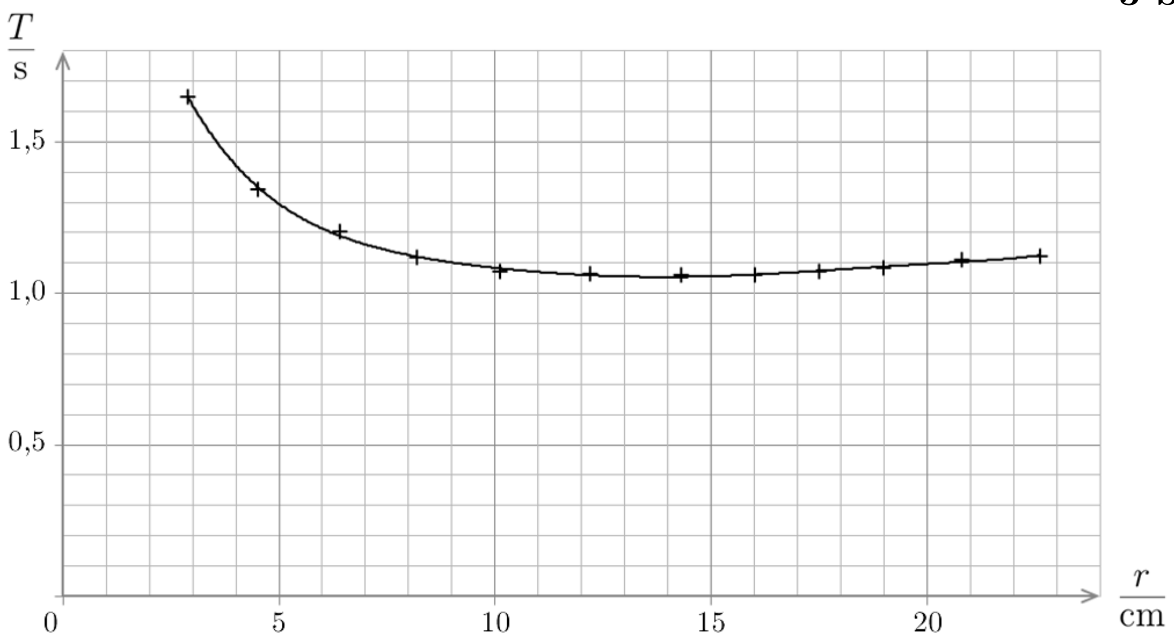
Závěr: Perioda kmitů nezávisí na směru spojnice těžiště a průsečíku osy otáčení s rovinou desky. **2 body**

4)

Číslo měření	$\frac{r}{\text{cm}}$	N	$\frac{t_1}{\text{s}}$	$\frac{t_2}{\text{s}}$	$\frac{t_3}{\text{s}}$	$\frac{T=\frac{\bar{t}}{N}}{\text{s}}$
1	2,9	10	16,38	16,37	16,65	1,647
2	4,5	10	13,44	13,55	13,30	1,343
3	6,4	10	12,02	12,01	12,02	1,202
4	8,2	10	11,27	11,17	11,15	1,120
5	10,1	10	10,80	10,62	10,78	1,073
6	12,2	10	10,65	10,64	10,60	1,063
7	14,3	10	10,55	10,61	10,62	1,059
8	16,0	10	10,66	10,59	10,60	1,062
9	17,5	10	10,78	10,76	10,69	1,074
10	19,0	10	10,87	10,79	10,82	1,083
11	20,8	10	11,12	11,08	11,07	1,109
12	22,6	10	11,28	11,23	11,21	1,124

3 body

5)



Obr. R4

Závěr: Nalezená funkce s rostoucí vzdáleností nejprve klesá, poté roste, vykazuje tedy minimum. **4 body**

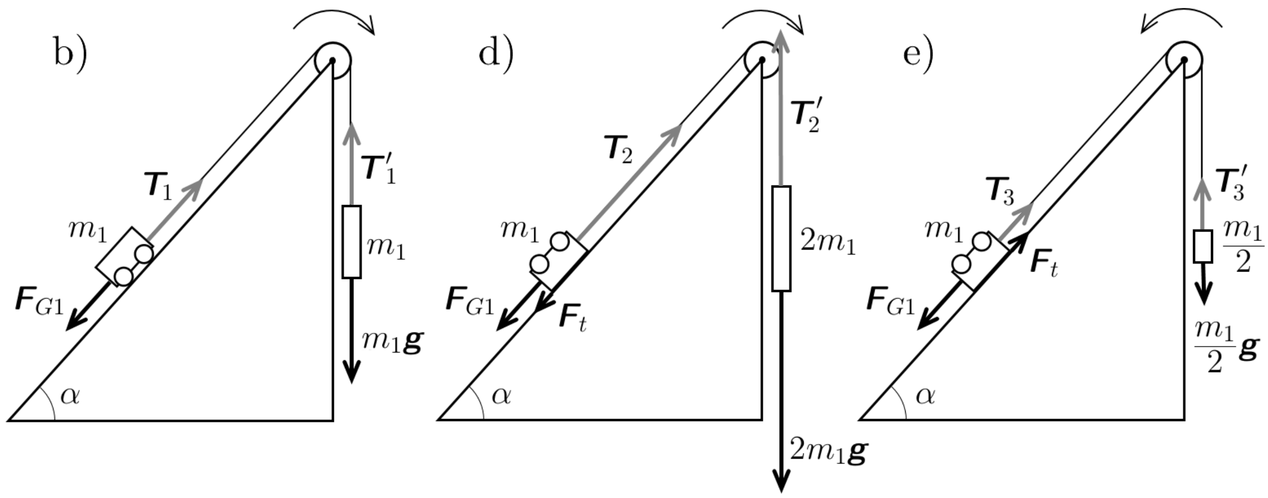
7. a) V rovnováze má tíhová síla závaží stejnou velikost jako složka tíhové síly vozíku ve směru nakloněné roviny (tečná složka):

$$mg = m_1 g \sin\alpha .$$

Z rovnice plyne

$$m = m_1 \sin\alpha = 0{,}77 m_1 .$$

1 bod



Obr. R5

b) Lanko je napnuté, obě tělesa se pohybují rovnoměrně zrychleným pohybem se stejnou velikostí zrychlení. Celá soustava o hmotnosti $2m_1g$ se tak uvádí do pohybu působením výslednice tíhové síly závaží a tečné složky tíhové síly vozíku (závaží dolů, vozík nahoru). Z pohybové rovnice soustavy

$$2m_1 a_1 = m_1 g - m_1 g \sin\alpha \tag{1}$$

plyne

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_1 g \sin\alpha}{2m_1} = \frac{1-\sin\alpha}{2} g = 0{,}12g .$$

Závaží působí na vozík prostřednictvím lanka tahovou silou $\boldsymbol{T}_1$, vozík působí na závaží pomocí lanka tahovou silou $\boldsymbol{T}_1'$. Jako akce a reakce mají stejnou velikost $T_1' = T_1$, kladka mění směr síly (silové působení kladky na lanko nemá v žádném bodě tečnou složku síly, proto k tahové síle nepřispívá).
Tahovou sílu určíme z pohybové rovnice pro vozík

$$m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \sin\alpha , \tag{2}$$

nebo z pohybové rovnice pro závaží

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1 . \tag{3}$$

V rovnicích velikost zrychlení již známe, jejím dosazením do první či druhé pohybové rovnice dostaneme shodný výsledek:

$$T_1 = m_1 g \sin\alpha + m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha + m_1 \cdot \frac{1-\sin\alpha}{2} g = \frac{\sin\alpha + 1}{2} m_1 g = 0,88 m_1 g ,$$

$$T_1 = m_1 g - m_1 a_1 = m_1 g - m_1 \cdot \frac{1-\sin\alpha}{2} g = \frac{1+\sin\alpha}{2} m_1 g = 0{,}88 m_1 g .$$

3 body

K řešení jsme použili kombinaci rovnic (1) a (2), nebo alternativně (1) a (3). K řešení vede libovolná dvojice ze tří pohybových rovnic, tj. též kombinace rovnic (2) a (3).

c) Převrácením vozíku působí na vozík proti pohybu třecí síla, jejíž hraniční velikost v klidu je

$$F_t = f m_1 g \cos\alpha .$$

Aby nedošlo k pohybu v žádném ze dvou možných směrů, musí tíhová síla závaží současně splňovat dvě podmínky:

$$m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha \quad \leq \quad mg \quad \leq \quad m_1 g \sin\alpha + f m_1 g \cos\alpha .$$

Z podmínek plyne

$$m \geq \; (\sin\alpha - f\cos\alpha)\, m_1 = 0{,}64 m_1 ,$$
$$m \leq \; (\sin\alpha + f\cos\alpha)\, m_1 = 0{,}89 m_1 .$$

2 body

d) Hmotnost závaží splňuje podmínku pro pohyb vozíku nahoru. Z pohybové rovnice soustavy

$$3 m_1 a_2 = 2 m_1 g - m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha$$

dostaneme

$$a_2 = \frac{2 - \sin\alpha - f\cos\alpha}{3} g = 0{,}37 g .$$

Z pohybové rovnice např. pro vozík

$$m_1 a_2 = T_2 - m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha$$

plyne

$$T_2 = m_1 a_2 + m_1 g \sin\alpha + f m_1 g \cos\alpha =$$
$$= m_1 \cdot \frac{2 - \sin\alpha - f\cos\alpha}{3} g + m_1 g \sin\alpha + f m_1 g \cos\alpha =$$
$$= \frac{2 - \sin\alpha - f\cos\alpha + 3\sin\alpha + 3f\cos\alpha}{3} m_1 g =$$
$$= \frac{2}{3}(1 + \sin\alpha + f\cos\alpha)\, m_1 g = 1{,}26 m_1 g .$$

2 body

e) Hmotnost závaží splňuje podmínku pro pohyb vozíku dolů. Z pohybové rovnice soustavy

$$\frac{3}{2} m_1 a_3 = m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha - \frac{m_1}{2} g$$

dostaneme

$$a_3 = \frac{2\sin\alpha - 2f\cos\alpha - 1}{3} g = 0{,}092 g .$$

Z pohybové rovnice např. pro vozík

$$m_1 a_3 = m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha - T_3$$

plyne

$$T_3 = m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha - m_1 a_3 =$$

$$= m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha - m_1 \cdot \frac{2\sin\alpha - 2f\cos\alpha - 1}{3} g =$$

$$= \frac{3\sin\alpha - 3f\cos\alpha - 2\sin\alpha + 2f\cos\alpha + 1}{3} m_1 g =$$

$$= \frac{1 + \sin\alpha - f\cos\alpha}{3} m_1 g = 0{,}55 m_1 g.$$

2 body