Řešení úloh okresního kola 65. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2023/2024

Kategorie E

FO65E2-1: Výlet na Vítkův hrádek *L. Richterek*

a) Alice s Lenkou vyrazily na trasu o 1,0 h dříve, ale po dobu 30 min = 0,5 h čekaly, takže celkem šly o $\Delta t = 1{,}0\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h} = 0{,}5\,\mathrm{h}$ déle než Ríša. Za tuto dobu rychlostí $v_1 = 4{,}0\,\mathrm{km/h}$ ušly vzdálenost $d_1 = v_1 \Delta t = 4{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 2{,}0\,\mathrm{km}$. Přesně o tuto vzdálenost ujde Ríša svou rychlostí $v_2 = 6{,}0\,\mathrm{km/h}$ za 1,0 h více než jeho kamarádky, cesta mu proto trvala 1,0 h a na hrad dorazil společně s Alicí a Lenkou v 11:06. **5 bodů**

Poznámka: Úlohu lze řešit i rovnicí. Označíme-li t hledaný čas chůze Ríši, pak platí

$$v_2 t = v_1 \left(t + \Delta t\right),$$
$$6{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot t = 4{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot \left(t + 0{,}5\,\mathrm{h}\right),$$
$$2t = 2{,}0\,\mathrm{h}, \qquad t = 1{,}0\,\mathrm{h}.$$

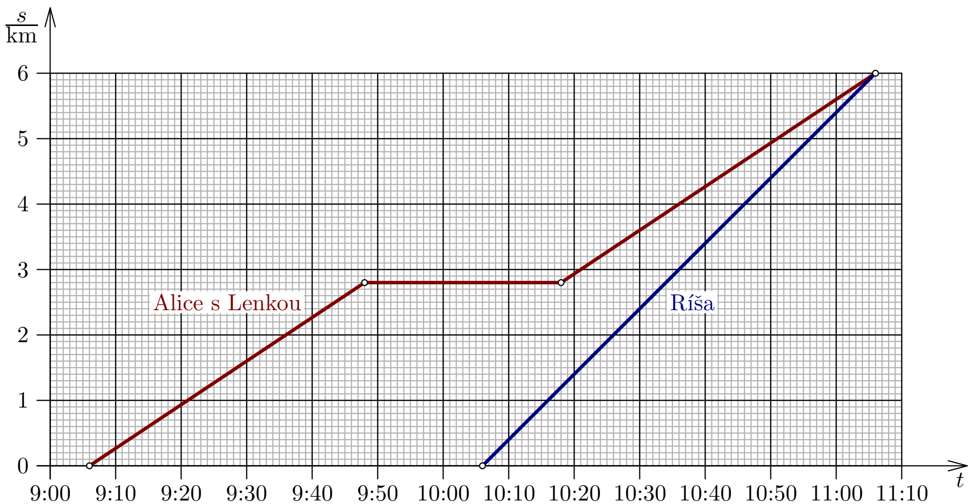
b) Vzdálenost s z Frýdavy na Vítkův hrádek určíme z pohybu Ríši

$$s = v_2 t = 6{,}0\,\mathrm{km/h} \cdot 1{,}0\,\mathrm{h} = 6{,}0\,\mathrm{km}.$$ **1 bod**

c) Pro konstrukci grafu potřebujeme určit čas, ve kterém se Alice s Lenkou zastavily u Svatotomášské studánky. Vzdálenost $d_1 = 2{,}8\,\mathrm{km}$ ušly za čas

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{2{,}8\,\mathrm{km}}{4{,}0\,\mathrm{km/h}} = 0{,}70\,\mathrm{h} = 42\,\mathrm{min}$$

a ke studánce došly v čase 9:06 + 0:42 = 9:48. Na další pochod pak vyrazily o $\Delta t = 0{,}5\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{min}$ později, tj. v 10:18. Příklad grafu je na obr. 1. **4 body**



Obr. 1: K úloze FO65E2-1

FO65E2-2: Dva vařiče *M. Voráček*

a) Hmotnost vody o objemu $V = 1{,}0\,\mathrm{litr} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$ je $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}^3 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Na její ohřátí je potřeba teplo

$$Q = mc\,(t_{100} - t_{20}) = 1{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 336\,000\,\mathrm{J}.$$

Při použití jednoho vařiče o příkonu $P_0 = 750\,\mathrm{W}$ při účinnosti $\eta = 93\,\% = 0{,}93$ za hledanou dobu τ dodá vařič teplo $Q' = \eta P_0 \tau$. Protože $Q = Q'$, dostáváme

$$\tau = \frac{Q}{\eta P_0} = \frac{336\,000\,\mathrm{J}}{0{,}93 \cdot 750\,\mathrm{W}} \doteq 481{,}72\,\mathrm{s} \doteq 8{,}0\,\mathrm{min}.$$ **4 body**

b) Energie odebraná ze sítě bude

$$W = \frac{Q}{\eta} = \frac{336\,000\,\mathrm{J}}{0{,}93} \doteq 361\,290\,\mathrm{J} \doteq 360\,\mathrm{kJ}.$$ **1 bod**

Poznámka: Energii lze spočítat i z příkonu P_0 a vypočtené doby τ

$$W = P_0\tau = 750\,\mathrm{W} \cdot 481{,}72\,\mathrm{s} = 361\,290\,\mathrm{J} \doteq 360\,\mathrm{kJ}.$$

c) Potřebná doba bude poloviční, tj. 4,0 min, neboť použijeme-li oba vařiče zapojené paralelně, bude každý z nich pracovat se jmenovitým výkonem a ve vodě se bude za časovou jednotku uvolňovat dvojnásobné množství tepla ve srovnání s případem a). **3 body**

d) Oběma vařiči poteče stejný proud. Protože platí $P_0 = UI$, pro hledaný proud dostáváme

$$I = \frac{P_0}{U} = \frac{750\,\mathrm{W}}{230\,\mathrm{V}} \doteq 3{,}260\,9\,\mathrm{A} \doteq 3{,}3\,\mathrm{A}.$$ **1 bod**

Pro odpor jednoho vařiče dostáváme

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\,\mathrm{V}}{3{,}260\,9\,\mathrm{A}} \doteq 70{,}533\,\Omega \doteq 71\,\Omega.$$ **1 bod**

Poznámka: Odpor lze určit i přímo z příkonu vařiče ze vztahu $P_0 = U^2/R$, odkud vyjádříme

$$R = \frac{U^2}{P_0} = \frac{(230\,\mathrm{V})^2}{750\,\mathrm{W}} \doteq 70{,}533\,\Omega \doteq 71\,\Omega.$$

FO65E2-3: Studna *V. Koudelková*

a) Práce odpovídá změně potenciální energie vědra s vodou. Objem $V = 12\,\text{litrů} = 0{,}012\,\text{m}^3$ vody má hmotnost $m_1 = \varrho V = 1\,000\,\text{kg/m}^3 \cdot 0{,}012\,\text{m}^3 = 12\,\text{kg}$. S hmotností prázdného vědra $m_2 = 2{,}0\,\text{kg}$ pak má plné vědro hmotnost $m = m_1 + m_2 = 12\,\text{kg} + 2{,}0\,\text{kg} = 14\,\text{kg}$. Pro práci k vytažení z hloubky $h = 60\,\text{m}$ pak dostáváme

$$W = mgh = 14\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{N/kg} \cdot 60\,\text{m} = 8\,232\,\text{J} \doteq 8{,}2\,\text{kJ}.$$ **2 body**

b) Na hřídel je potřeba namotat $h = 60\,\text{m}$ lana. Obvod hřídele o průměru $d_1 = 40\,\text{cm} = 0{,}4\,\text{m}$ vychází $o_1 \doteq \pi d_1 = 1{,}256\,6\,\text{m}$, obvod šlapacího kola o průměru $d_2 = 3{,}0\,\text{m}$ pak $o_2 = \pi d_2 \doteq 9{,}424\,8\,\text{m}$. Hřídel musí udělat

$$n = \frac{h}{o_1} = \frac{60\,\text{m}}{1{,}256\,6\,\text{m}} \doteq 47{,}748\,\text{otáček},$$

kolo jich musí udělat stejně; celková vzdálenost, kterou musí ujít člověk

$$s = no_2 = 47{,}748 \cdot 9{,}424\,8\,\text{m} \doteq 450\,\text{m}.$$ **3 body**

c) Při rychlosti $v = 4{,}5\,\text{km/h} = 1{,}25\,\text{m/s}$ potřebuje člověk k ujití vzdálenosti s čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{450\,\text{m}}{1{,}25\,\text{m/s}} = 360\,\text{s} = 6{,}0\,\text{min}.$$ **2 body**

d) Z momentu sil pro rumpál (kolo na hřídeli) o poloměru $r = 1{,}2\,\text{m}$ plyne

$$Fr = mg\frac{d_1}{2},$$

odkud vyjádříme

$$F = mg\frac{d_1}{2r} = 14\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{N/kg} \cdot \frac{0{,}40\,\text{m}}{2 \cdot 1{,}2\,\text{m}} \doteq 22{,}867\,\text{N} \doteq 23\,\text{N}.$$ **3 body**

FO65E2-4: Injekční stříkačka *J. Thomas*

a) Objemy vyjádříme v cm^3 jako $V_1 = 3{,}00\,\mathrm{cm}^3$ a $V_2 = 5{,}00\,\mathrm{cm}^3$. V prvním případě platí

$$m_1 = m + \varrho V_1\,,$$

ve druhém případě podobně

$$m_2 = m + \varrho V_2\,.$$

Odečtením rovnic získáme

$$m_2 - m_1 = \varrho\,(V_2 - V_1)\,;$$

$$\varrho = \frac{m_2 - m_1}{V_2 - V_1} = \frac{17{,}0\,\mathrm{g} - 14{,}4\,\mathrm{g}}{5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 3{,}00\,\mathrm{cm}^3} = 1{,}3\,\mathrm{g/cm}^3 = 1\,300\,\mathrm{kg/m}^3.$$

2 body

b) Z první rovnice vyjádříme

$$m = m_1 - \varrho V_1 = m_1 - \frac{m_2 - m_1}{V_2 - V_1}V_1 = \frac{m_1 V_2 - m_2 V_1}{V_2 - V_1} =$$

$$= \frac{14{,}4\,\mathrm{g}\cdot 5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 17{,}0\,\mathrm{g}\cdot 3{,}00\,\mathrm{cm}^3}{5{,}00\,\mathrm{cm}^3 - 3{,}00\,\mathrm{cm}^3} = 10{,}5\,\mathrm{g}.$$

2 body

c) Za dobu t se píst posune rychlostí v o vzdálenost $d = vt$, což je délka sloupce léku ve stříkačce. Objem léku je tedy $V_2 = S_1 d = S_1 vt$, proto

$$v = \frac{V_2}{S_1 t} = \frac{5{,}00\,\mathrm{cm}^3}{1{,}50\,\mathrm{cm}^2\cdot 5{,}00\,\mathrm{s}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm/s} \doteq 0{,}667\,\mathrm{cm/s}.$$ **2 body**

Průřez jehly $S_2 = S_1/n^2$. Tímto průřezem musí za stejnou dobu protéci rychlostí u stejný objem léku. Dostáváme tedy

$$V_2 = S_2 ut = \frac{S_1}{n^2}ut.$$

Odtud

$$u = \frac{V_2 n^2}{S_1 t} = n^2 v = \frac{5{,}00\,\mathrm{cm}^3\cdot 25^2}{1{,}50\,\mathrm{cm}^2\cdot 5{,}00\,\mathrm{s}} \doteq 416{,}67\,\mathrm{cm/s} \doteq 4{,}17\,\mathrm{m/s}.$$ **2 body**

d) Lékař musí působit silou

$$F = pS_1 = 18\,700\,\mathrm{Pa}\cdot 0{,}000\,15\,\mathrm{m}^2 = 2{,}805\,\mathrm{N} \doteq 2{,}81\,\mathrm{N}.$$ **2 body**