Řešení úloh krajského kola 65. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2023/2024

Kategorie E

FO65E3-1: Bratři na výletě *J. Thomas*

a) Označme dobu jízdy Petra jako t_1, dobu jízdy Zdeňka jako t_2. Z grafu vidíme, že prvních 10 minut jsou oba bratři v pohybu. Za tuto dobu se mezi nimi utvořila vzdálenost $s_1 = 2\,400\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{km}$. Dalších 5 minut se vzdálenost mezi bratry zvětšuje rychleji, to znamená, že v pohybu je jen Petr, který za tuto dobu dojede k Růženě, kde čeká na Zdeňka. Doba jízdy Petra je tedy $t_1 = 10\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} = 15\,\mathrm{min} = 900\,\mathrm{s}$.
Zdeňkovi oprava spadlého řetězu trvala $\Delta t = 5\,\mathrm{min}$. **4 body**

b) Zdeňkovi zbývá po opravě řetězu ujet ještě vzdálenost $s_2 = 4\,800\,\mathrm{m} = 4{,}8\,\mathrm{km}$, kterou ujede za $t_3 = 20\,\mathrm{min} = 1\,200\,\mathrm{s}$. Jeho rychlost tedy je

$$v_2 = \frac{s_2}{t_3} = \frac{4\,800\,\mathrm{m}}{1\,200\,\mathrm{s}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s} = 14{,}4\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

Nyní můžeme určit vzdálenost z domova chlapců k Růženě. Zdeňkovi jízda trvala čas $t_4 = 10\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{s}$ do zastávky a $t_3 = 20\,\mathrm{min} = 1\,200\,\mathrm{s}$, po zastávce. Jel tedy rychlostí v_2 celkem $t_4 + t_3 = 10\,\mathrm{min} + 20\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{min} = 1\,800\,\mathrm{s}$. Celková ujetá vzdálenost je proto

$$s = v_2\,(t_4 + t_3) = 4{,}0\,\mathrm{m/s} \cdot 1\,800\,\mathrm{s} = 7\,200\,\mathrm{m} = 7{,}2\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

c) Rychlost Petra vychází

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{7\,200\,\mathrm{m}}{900\,\mathrm{s}} = 8{,}0\,\mathrm{m/s} = 28{,}8\,\mathrm{km/h} = 2v_2.$$

Petr je dvakrát rychlejší než Zdeněk. **2 body**

Poznámka: Lze pochopitelně zvolit i jiný postup, uveďme jako příklad ještě jednu možnost. Na 1. úseku se bratři pohybují vzájemnou rychlostí $v_1 - v_2$ a za čas $t_1 = 10\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{s}$ jejich vzdálenost naroste na $2\,400\,\mathrm{m}$. Pro rozdíl rychlostí pak platí

$$v_1 - v_2 = \frac{2\,400\,\mathrm{m}}{600\,\mathrm{s}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s}.$$

Petr jel sám po dobu $t_2 = 5\,\mathrm{min} = 300\,\mathrm{s}$ a za tu dobu ujel $2\,400\,\mathrm{m}$, pro jeho rychlost v_1 pak vychází

$$v_1 = \frac{2\,400\,\mathrm{m}}{300\,\mathrm{s}} = 8{,}0\,\mathrm{m/s},$$

pro Zdeňka o $4{,}0\,\mathrm{m/s}$ méně, tj. $v_2 = 4{,}0\,\mathrm{m/s}$. Petr se pohyboval celkem po dobu $t_1 + t_2 = 10\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} = 15\,\mathrm{min} = 900\,\mathrm{s}$ a ujel celkem vzdálenost

$$L = v_1\,(t_1 + t_2) = 8{,}0\,\mathrm{m/s} \cdot 900\,\mathrm{s} = 7\,200\,\mathrm{m} = 7{,}2\,\mathrm{km}.$$

FO65E3-2: Snídaně z mikrovlnky *J. Thomas*

a) Pro objem V_s skla tvořícího prázdnou sklenici vychází

$$V_\mathrm{s} = \frac{m_\mathrm{s}}{\varrho_\mathrm{s}} = \frac{122\,\mathrm{g}}{2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}} = 48{,}8\,\mathrm{cm^3} \doteq 49\,\mathrm{ml}.$$ **1 bod**

b) Mléko vyplní válcový prostor s obsahem dna jako podstavy $\pi r_1^2 = \pi\,(d_1/2)^2$ sahá do výšky

$$h_1 = \frac{V_\mathrm{m}}{\pi \dfrac{d_1^2}{4}} = \frac{200\,\mathrm{cm}^3}{\pi \cdot \dfrac{(6{,}0\,\mathrm{cm})^2}{4}} \doteq 7{,}073\,6\,\mathrm{cm} \doteq 7{,}1\,\mathrm{cm}$$

nade dnem. **2 body**

c) Teplo potřebné k ohřátí sklenice bude

$$Q_1 = m_\mathrm{s} c_\mathrm{s}\,(t_{100} - t_{20}) = 0{,}122\,\mathrm{kg} \cdot 720\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = \\ = 7\,027{,}0\,\mathrm{J} \doteq 7{,}0\,\mathrm{kJ}.$$

Objem $V_\mathrm{m} = 200\,\mathrm{ml} = 0{,}000\,2\,\mathrm{m}^3$ mléka má podobně jako voda hmotnost $m_\mathrm{m} = \varrho_2 V_\mathrm{m} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,2\,\mathrm{m}^3 = 0{,}2\,\mathrm{kg}$. Teplo potřebné k ohřátí mléka vychází

$$Q_2 = m_\mathrm{m} c_2\,(t_{100} - t_8) = 0{,}2\,\mathrm{kg} \cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot (100\,^\circ\mathrm{C} - 8\,^\circ\mathrm{C}) = \\ = 77\,280\,\mathrm{J} \doteq 77\,\mathrm{kJ}.$$

4 body

d) Účinnost mikrovlnky je dána poměrem součtu tepla potřebného k ohřátí sklenice i tepla potřebného k ohřátí mléka a energie dodané mikrovlnkou s příkonem $P = 1\,200\,\mathrm{W}$ a čas $\tau = 90\,\mathrm{s}$. Po dosazení dostáváme

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{P\tau} = \frac{7\,027{,}0\,\mathrm{J} + 77\,280\,\mathrm{J}}{1\,200\,\mathrm{W} \cdot 90\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}780\,62 \doteq 78\,\%.$$

Účinnost ohřívání v mikrovlnce je asi 78 %. **3 body**

FO65E3-3: Skleněná láhev ve vodě *J. Thomas*

a) Objem skla

$$V_\mathrm{s} = \frac{m}{\varrho_\mathrm{s}} = \frac{250\,\mathrm{g}}{2{,}5\,\mathrm{g/cm^3}} = 100\,\mathrm{cm}^3.$$

Objem celé láhve pak zahrnuje i vnitřní objem láhve $V_0 = 0{,}5\,\text{litru} = 500\,\mathrm{cm}^3$ a vychází

$$V = V_\mathrm{s} + V_0 = 100\,\mathrm{cm}^3 + 500\,\mathrm{cm}^3 = 600\,\mathrm{cm}^3.$$ **2 body**

b) Na prázdnou láhev o hmotnosti $250\,\mathrm{g} = 0{,}25\,\mathrm{kg}$, která plove na vodě, působí vztlaková síla rovna její tíze

$$F_\mathrm{vz} = mg = 0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 2{,}45\,\mathrm{N} \doteq 2{,}5\,\mathrm{N}.$$ **2 body**

Poznámka: Snadno se přesvědčíme, že hmotnost vzduchu v láhvi o objemu V_0 a hustotě $\varrho_\mathrm{vz} = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}001\,2\,\mathrm{g/cm^3}$ je ve srovnání s hmotností skla zanedbatelná. Dostáváme

$$m_\mathrm{vz} = \varrho_\mathrm{vz} V_0 = 0{,}001\,2\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 500\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}60\,\mathrm{g} \ll m = 250\,\mathrm{g}.$$

c) Objem vody V_1, jejíž tíha podle Archimédova zákona odpovídá tíze prázdné láhve splňuje podmínku

$$\varrho V_1 g = mg$$

odkud vychází

$$V_1 = \frac{m}{\varrho} = \frac{250\,\mathrm{g}}{1{,}0\,\mathrm{g/cm^3}} = 250\,\mathrm{cm^3}.$$

Nad vodou potom vyčnívá objem $V_2 = V - V_1 = 600\,\mathrm{cm^3} - 250\,\mathrm{cm^3} = 350\,\mathrm{cm^3}$.

2 body

d) Když se láhev zcela potopí, bude podle Archimédova zákona vztlaková síla rovna tíze vody o objemu $V = 600\,\mathrm{cm^3} = 0{,}000\,6\,\mathrm{m^3}$, tedy

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho V g = 1\,000\,\mathrm{kg/cm^3} \cdot 0{,}000\,6\,\mathrm{m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 5{,}88\,\mathrm{N} \doteq 5{,}9\,\mathrm{N}.$$ **2 body**

Vztlaková síla je pak rovna tíze láhve naplněné látkou o hustotě ϱ_1

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho V g = mg + V_0 \varrho_1 g.$$

Odtud vypočítáme hledanou hustotu látky

$$\varrho_1 = \frac{F_{\mathrm{vz}} - mg}{V_0 g} = \frac{\varrho V g - mg}{V_0 g} = \frac{\varrho V - m}{V_0} =$$

$$= \frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}000\,6\,\mathrm{m^3} - 0{,}25\,\mathrm{kg}}{0{,}000\,5\,\mathrm{m^3}} = 700\,\mathrm{kg/m^3} = 0{,}7\,\mathrm{g/cm^3}.$$

2 body

FO65E3-4: Tři žárovky *J. Novotný*

a) Pro příkon P spotřebiče o odporu R připojeného na napětí U_1, jímž protéká proud I s využitím Ohmova zákona platí

$$P = U_1 I = U_1 \frac{U_1}{R} = \frac{U_1^2}{R}.$$

Odtud vyjádříme proud protékající žárovkou

$$I = \frac{P}{U_1}.$$

a její odpor

$$R = \frac{U_1}{I} = \frac{U_1^2}{P}.$$

Pro zadané příkony $P_1 = 50\,\mathrm{W}$ a $P_2 = 100\,\mathrm{W}$ a stejné napětí pro obě žárovky $U_1 = 115\,\mathrm{V}$ dostáváme

$$I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{50\,\mathrm{W}}{115\,\mathrm{V}} \doteq 0{,}434\,78\,\mathrm{A} \doteq 430\,\mathrm{mA},$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U_1} = \frac{100\,\mathrm{W}}{115\,\mathrm{V}} \doteq 0{,}869\,57\,\mathrm{A} \doteq 870\,\mathrm{mA},$$

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{(115\,\mathrm{V})^2}{50\,\mathrm{W}} = 264{,}5\,\Omega \doteq 260\,\Omega,$$

$$R_2 = \frac{U_1^2}{P_2} = \frac{(115\,\mathrm{V})^2}{100\,\mathrm{W}} = 132{,}25\,\Omega \doteq 130\,\Omega.$$

Vidíme že platí $I_2 = 2I_1$ a $R_2 = R_1/2$. **4 body**

b, c) Pokud bychom žárovky spojili za sebou (sériově), byl by jejich výsledný odpor

$$R_{\mathrm{s}} = 2R_1 + R_2 = 2 \cdot 264{,}5\,\Omega + 132{,}25\,\Omega = 661{,}25\,\Omega$$

a každou žárovkou by pro připojení k napětí $U_2 = 230\,\mathrm{V}$ protékal proud

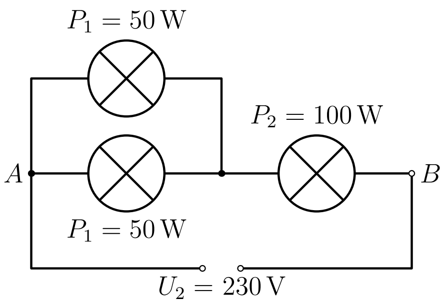
$$I_\mathrm{s} = \frac{U_2}{R_\mathrm{s}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{661{,}25\,\Omega} \doteq 0{,}347\,83\,\mathrm{A} \doteq 350\,\mathrm{mA},$$

což je méně než I_1 i I_2, žárovky by tak nesvítily plným světlem. Pokud bychom je připojili k napětí U_2 paralelně, každá by byla připojena na napětí větší (dvojnásobné), než je určena, a spálily by se. **1 bod**

Vyzkoušejme ještě zapojení podle obr. 1. Výsledný odpor dvou paralelně zapojených žárovek s příkonem $P_1 = 50\,\mathrm{W}$ a odporem $R_1 = 264{,}5\,\Omega$ bude poloviční, tj. $R_1/2$, k němu je pak sériově připojena žárovka s příkonem $P_2 = 100\,\mathrm{W}$ a odporem $R_2 = 132{,}25\,\Omega$. Celkový odpor pak vychází

$$R_\mathrm{c} = \frac{R_1}{2} + R_2 =$$

$$= \frac{264{,}5\,\Omega}{2} + 132{,}25\,\Omega = 264{,}5\,\Omega = R_1.$$



Obr. 1: K řešení úlohy FO65E3-4

Poté, co připojíme k bodům A a B napětí $U_2 = 230\,\mathrm{V}$, bude žárovkou vpravo o příkonu $P_2 = 100\,\mathrm{W}$ procházet proud

$$I = \frac{U_2}{R_\mathrm{c}} = \frac{230\,\mathrm{V}}{264{,}5\,\Omega} \doteq 0{,}869\,57\,\mathrm{A} \doteq 870\,\mathrm{mA} = I_2$$

a napětí na této žárovce bude $R_2 I = 132{,}25\,\Omega \cdot 0{,}869\,57\,\mathrm{A} = 115\,\mathrm{V}$; žárovka svítí plným světlem a nespálí se.

Každou z žárovek o příkonu $P_1 = 50\,\mathrm{W}$ bude procházet proud $I/2 \doteq 0{,}434\,78\,\mathrm{A} \doteq 430\,\mathrm{mA}$ a na každé z nich bude napětí $R_1 I/2 = 264{,}5\,\Omega \cdot 0{,}869\,57\,\mathrm{A}/2 = 115\,\mathrm{V}$. Proto i tyto žárovky svítí plným světlem a nespálí se. **5 bodů**