Řešení úloh školního kola 65. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2023/2024

Kategorie G – Archimédiáda

FO65G1-1: Motokáry *D. Kaštilová*

Úlohu lze řešit s různými jednotkami (km/h a h, m/s a s). Pro numerické výpočty je i s ohledem na dobu pohybu nejvýhodnější používat km/min a minuty, pro $v_1 = 12\,\mathrm{km/h} = 0{,}20\,\mathrm{km/min}$.

a) Dobu t_1, kterou strávil Aleš na trati, než ho Čenda předjel, vypočítáme ze vztahu:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{2{,}5\,\mathrm{km}}{0{,}2\,\mathrm{km/min}} = 12{,}5\,\mathrm{min}.$$

Čenda vyjel o 5 min později, takže dráhu s_1 urazil za dobu $t_2 = 12{,}5\,\mathrm{min} - 5\,\mathrm{min} = 7{,}5\,\mathrm{min} = 0{,}125\,\mathrm{h}$. Rychlost Čendy v_2 vypočítáme

$$v_2 = \frac{s_1}{t_2} = \frac{2{,}5\,\mathrm{km}}{7{,}5\,\mathrm{min}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{km/min} = 20\,\mathrm{km/h} \qquad (\doteq 5{,}6\,\mathrm{m/s}).$$ **3 body**

b) Označme rychlost Mirka před vyjetím z trati $v_3 = 15\,\mathrm{km/h} = 0{,}25\,\mathrm{km/min}$, po najetí zpět na trať $v_4 = 18\,\mathrm{km/h} = 0{,}30\,\mathrm{km/min}$, dále $t_3 = 6{,}0\,\mathrm{min}$ a $t_4 = 3{,}0\,\mathrm{min}$.

Dobu jízdy t_A Aleše vypočítáme $t_\mathrm{A} = s/v_1 = 6{,}0\,\mathrm{km}/0{,}2\,\mathrm{km/min} = 30\,\mathrm{min}$. Protože vyjel v 9:30 h, tak cílem projel v 10:00 h.

Dobu jízdy t_C Čendy vypočítáme $t_\mathrm{C} = s/v_2 = 6{,}0\,\mathrm{km}/\left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{km/min} = 18\,\mathrm{min}$.

Protože vyjel v 9:35 h, tak cílem projel v 9:53 h.

Dráhu s_2, kterou ujel Mirek do vyjetí z tratě, vypočítáme $s_2 = v_3 t_3 = 0{,}25\,\mathrm{km/min} \cdot 6{,}0\,\mathrm{min} = 1{,}5\,\mathrm{km}$. Do cíle mu zbývá ujet dráhu $s_3 = s - s_2 = 6{,}0\,\mathrm{km} - 1{,}5\,\mathrm{km} = 4{,}5\,\mathrm{km}$. Dobu t_5 potřebnou na ujetí této vzdálenosti vypočítáme

$$t_5 = \frac{s_3}{v_4} = \frac{4{,}5\,\mathrm{km}}{0{,}3\,\mathrm{km/min}} = 15\,\mathrm{min}.$$

Celkovou dobu t_M Mirka od startu až do projetí cílem získáme součtem

$$t_\mathrm{M} = t_3 + t_4 + t_5 = 6{,}0\,\mathrm{min} + 3{,}0\,\mathrm{min} + 15\,\mathrm{min} = 24\,\mathrm{min}.$$

Protože vyjel v 9:40 h, tak cílem projel v 10:04 h. **6 bodů**

c) Průměrnou rychlost v_p Mirka získáme podělením

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t_\mathrm{M}} = \frac{6{,}0\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{min}} = 0{,}25\,\mathrm{km/min} = 15\,\mathrm{km/h}. \qquad (\doteq 4{,}2\,\mathrm{m/s})$$ **1 bod**

FO65G1-2: Zvon s ozvěnou *J. Thomas*

a) Zvuk musí urazit za dobu $T_1 = 1{,}8\,\mathrm{s}$ vzdálenost s_1 ke skále u domu a zpět k sedlákovi. Tedy platí $2s_1 = v_\mathrm{z} T_1$ a

$$s_1 = \frac{v_z T_1}{2} = \frac{340\,\mathrm{m/s}\cdot 1{,}8\,\mathrm{s}}{2} = 306\,\mathrm{m} \doteq 310\,\mathrm{m}.$$

Protože sedlák je na cestě $t_1 - t_0 = 5\,\mathrm{min}$, jeho rychlost vychází

$$v = \frac{s_1}{t_1 - t_0} = \frac{306\,\mathrm{m}}{5\cdot 60\,\mathrm{s}} = 1{,}02\,\mathrm{m/s} \doteq 1{,}0\,\mathrm{m/s}. \qquad (= 3{,}672\,\mathrm{km/h} \doteq 3{,}7\,\mathrm{km/h})$$

Vzdálenost ke kostelu zatím není možné určit. **3 body**

b) Sedlák za $t_2 - t_1 = 15\,\mathrm{min}$ ujde vzdálenost $s_2 = v\,(t_2 - t_1) = 1{,}02\,\mathrm{m/s}\cdot 15\cdot 60\,\mathrm{s} = 918\,\mathrm{m}$. Od domu je vzdálen $s_1 + s_2 = 306\,\mathrm{m} + 918\,\mathrm{m} = 1\,224\,\mathrm{m}$ (lze spočítat i jako $s_1 + s_2 = v\,(t_2 - t_0) = 1{,}02\,\mathrm{m/s}\cdot(30-10)\cdot 60\,\mathrm{s} = 1\,224\,\mathrm{m}$). Zvuk musí k domu a zpět urazit dvojnásobnou vzdálenost za čas

$$T_2 = \frac{2\,(s_1 + s_2)}{v_z} = \frac{2\cdot 1\,224\,\mathrm{m}}{340\,\mathrm{m/s}} = 7{,}2\,\mathrm{s}.$$ **3 body**

c) Sedlák za $t_3 - t_2 = 15\,\mathrm{min}$ ujde další vzdálenost s_2 navíc a od domu bude vzdálen $s_1 + 2s_2 = 306\,\mathrm{m} + 2\cdot 918\,\mathrm{m} = 2\,142\,\mathrm{m}$ (lze spočítat i jako $s_1 + 2s_2 = v\,(t_3 - t_0) = 1{,}02\,\mathrm{m/s}\cdot(45-10)\cdot 60\,\mathrm{s} = 2\,142\,\mathrm{m}$). Obdobně jako v části b) doba mezi zaslechnutím úderu zvonu a odraženého zvuku bude

$$T_3 = \frac{2\,(s_1 + 2s_2)}{v_z} = \frac{2\cdot 2\,142\,\mathrm{m}}{340\,\mathrm{m/s}} = 12{,}6\,\mathrm{s} \doteq 13\,\mathrm{s}.$$ **2 body**

d) Vzdálenost od domu ke kostelu ušel za $t_4 - t_0 = 40\,\mathrm{min} = 2\,400\,\mathrm{s}$. Kostel je od domu ve vzdálenosti

$$d = v\,(t_4 - t_0) = 1{,}02\,\mathrm{m/s}\cdot 2\,400\,\mathrm{s} = 2\,448\,\mathrm{m} \doteq 2{,}4\,\mathrm{km}.$$ **2 body**

Poznámka: Ve výše uvedeném řešení není započítáno šíření zvuku od kostela k místu, kde se nachází sedlák, když slyší zvuk zvonu. Např. pro první zaslechnutí zvonu v 9:15 h ve vzdálenosti $d - s_1 = 2\,448\,\mathrm{m} - 306\,\mathrm{m} = 2\,142\,\mathrm{m}$ od kostela potřebuje zvuk na uražení této vzdálenosti čas $(d - s_1)/v_z = 2\,142\,\mathrm{m}/(340\,\mathrm{m/s}) = 6{,}3\,\mathrm{s}$. Vzhledem k obvyklé přesnosti věžních hodin lze tento rozdíl zanedbat, sedlák za tento čas ujde asi 6,4 m, takže i chyba v určení polohy je malá. Pro zbývající dvě zaslechnutí zvonu blíže ke kostelu jsou rozdíly ještě menší.

FO65G1-3: Hmotnost batohu *D. Kaštilová*

a) Tíhovou sílu F_m, kterou Mirčin batoh působí na tyč, získáme ze vztahu

$$F_m = m_m g = 12\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg} = 117{,}6\,\mathrm{N}.$$

Páka je v rovnováze, proto pro tíhovou sílu Katčina batohu F_k platí $F_m a_1 = F_k a_2$, odkud

$$F_k = F_m \frac{a_1}{a_2} = 117{,}6\,\mathrm{N}\cdot\frac{3{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}4\,\mathrm{m}} = 147\,\mathrm{N}.$$

Pro hmotnost m_k Katčina batohu tak dostáváme

$$m_\mathrm{k} = \frac{F_\mathrm{k}}{g} = \frac{F_\mathrm{m}}{g}\frac{a_1}{a_2} = m_\mathrm{m}\frac{a_1}{a_2} = 12\,\mathrm{kg} \cdot \frac{3{,}0\,\mathrm{m}}{2{,}4\,\mathrm{m}} = 15\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

b) Podobně pro hmotnost m_a Alicina batohu a tíhovou sílu F_a, která na něj působí, podle obr. 2 zadání platí

$$F_\mathrm{a}a_3 = F_\mathrm{m}a_4$$

a

$$m_\mathrm{a} = \frac{F_\mathrm{a}}{g} = \frac{F_\mathrm{m}}{g}\frac{a_4}{a_3} = m_\mathrm{m}\frac{a_4}{a_3} = 12\,\mathrm{kg} \cdot \frac{1{,}8\,\mathrm{m}}{3{,}0\,\mathrm{m}} = 7{,}2\,\mathrm{kg}.$$ **3 body**

c) Princip výpočtu je opět podobný. V rovnováze musí platit

$$F_\mathrm{a}a_5 = F_\mathrm{k}a_6,$$

odkud vyjádříme

$$a_6 = a_5\frac{F_\mathrm{a}}{F_\mathrm{k}} = a_5\frac{m_\mathrm{a}g}{m_\mathrm{k}g} = a_5\frac{m_\mathrm{a}}{m_\mathrm{k}} = 3{,}0\,\mathrm{m} \cdot \frac{7{,}2\,\mathrm{kg}}{15\,\mathrm{kg}} = 1{,}44\,\mathrm{m} \doteq 1{,}4\,\mathrm{m}.$$ **4 body**

FO65G1-4: Stavba zdi *J. Thomas*

a) Označme délku příkopu $l = 9{,}0\,\mathrm{m}$, šířku $d = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$ a hloubku $h = 80\,\mathrm{cm} = 0{,}8\,\mathrm{m}$. Objem potřebného betonu vychází

$$V = ldh = 9{,}0\,\mathrm{m} \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} = 2{,}16\,\mathrm{m}^3.$$

Jeho hmotnost při hustotě betonu $\varrho = 2{,}2\,\mathrm{g/cm^3} = 2\,200\,\mathrm{kg/m^3}$ pak bude

$$m = \varrho V = 2\,200\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 2{,}16\,\mathrm{m}^3 = 4\,752\,\mathrm{kg} \doteq 4{,}8\,\mathrm{t}.$$

Protože jedno auto uveze 1 t betonu, je zapotřebí 5 aut (a bude dobré najít využití pro přebytečný beton navíc). **3 body**

b) Označme rozměry tvárnic $a = 60\,\mathrm{cm} = 0{,}6\,\mathrm{m}$, $b = 30\,\mathrm{cm} = 0{,}3\,\mathrm{m}$, $c = 25\,\mathrm{cm} = 0{,}25\,\mathrm{m}$. Budeme-li tvárnice stavět na plochu $a \times b$, bude jich v jedné řadě $l/a = 9{,}0\,\mathrm{m}/0{,}6\,\mathrm{m} = 15$. Aby zeď dosáhla do výšky $h_1 = 3{,}0\,\mathrm{m}$, musí být těchto řad $h_1/c = 3{,}0\,\mathrm{m}/0{,}25\,\mathrm{m} = 12$. Zeď bude tvořit $15 \times 12 = 180$ tvárnic; 5 % navíc je 9 tvárnic, celkem tedy 189 tvárnic. **4 body**

c) Hmotnost jedné tvárnice je při hustotě $\varrho_1 = 1\,400\,\mathrm{kg/m^3}$

$$m_1 = \varrho_1 abc = 1\,400\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} \cdot 0{,}3\,\mathrm{m} \cdot 0{,}25\,\mathrm{m} = 63\,\mathrm{kg}.$$

Na plochu $S = 9{,}0\,\mathrm{m} \times 0{,}3\,\mathrm{m} = 2{,}7\,\mathrm{m}^2$ působí tíha 180 tvárnic; tlak bude tedy

$$p = \frac{180 m_1 g}{S} = \frac{180 \cdot 63\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}}{2{,}7\,\mathrm{m}^2} = 41\,160\,\mathrm{Pa} \doteq 41\,\mathrm{kPa}.$$ **3 body**

Poznámka: Tlak lze počítat i tak, že vypočteme objem celé zdi (a tedy všech tvárnic)

$$V_1 = ldh_1 = 9{,}0\,\mathrm{m}\cdot 0{,}30\,\mathrm{m}\cdot 3{,}0\,\mathrm{m} = 8{,}1\,\mathrm{m}^3$$

a její celkovou hmotnost

$$m_\mathrm{c} = \varrho_1 V_1 = 1\,400\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 8{,}1\,\mathrm{m}^3 = 11\,340\,\mathrm{kg} = 180 m_1.$$

Tlak pak vychází opět

$$p = \frac{m_\mathrm{c} g}{S} = \frac{11\,340\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}}{2{,}7\,\mathrm{m}^2} = 41\,160\,\mathrm{Pa} \doteq 41\,\mathrm{kPa}.$$

FO65G1-5 (experimentální úloha):
Hmotnost, objem a hustota českých mincí *J. Thomas*

a) Údaje o českých mincích lze zjistit např. na stránkách České národní banky (`https://www.cnb.cz/cs/bankovky-a-mince/mince/`).
Nalezené údaje:

mince	hmotnost m/g	průměr d/mm	výška h/mm
1 Kč	3,6	20	1,85
2 Kč	3,7	21,5	1,85
5 Kč	4,8	23	1,85
10 Kč	7,62	24,5	2,55
20 Kč	8,43	25	2,55
50 Kč	9,7	27,5	2,55

Při vážení je výhodnější zvážit více mincí najednou a hmotnost jedné určit podělením.

b) Objem válce o průměru d a výšce h vypočteme podle vztahu

$$V = \pi\frac{d^2 h}{4}.$$

Pro mince z výše uvedených hodnot vychází:

mince	1 Kč	2 Kč	5 Kč	10 Kč	20 Kč	50 Kč
V/cm^3	0,58	0,67	0,77	1,20	1,25	1,51

Naměřený objem by měl vyjít menší (např. pro minci 1 Kč okolo $0{,}5\,\mathrm{cm}^3$)., protože vroubkování po obvodu a ražba nápisů i výtvarných motivů znamená, že část z objemu válce je odstraněna.

c) Hustotu vypočteme podle vztahu $\varrho = m/V$. Očekávané hodnoty by měly být přibližně v rozmezí $(6{,}0 - 7{,}5)\ \mathrm{cm}^3$.

d) Tabulková hustota oceli je $(7{,}4 - 8{,}0)\ \mathrm{g/cm^3}$, mědi $8{,}96\,\mathrm{g/cm^3}$, niklu $8{,}91\,\mathrm{g/cm^3}$, zinku $7{,}14\,\mathrm{g/cm^3}$ (viz např. `http://www.converter.cz/tabulky/hustota-pevne.htm`). Základem mincí je ocel pokovená slitinami jmenovaných kovů (o přítomnosti oceli a niklu se snadno přesvědčíme magnetem).