DIFERENCIÁLNÍ POČET VE FYZICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Josef Jírů

Obsah

Úvod

Ve středoškolské fyzice se téměř výhradně při zkoumání pohybu a dalších jevů probíhajících v čase užívají zjednodušující předpoklady. Pohyb se považuje za rovnoměrný, resp. rovnoměrně zrychlený či rovnoměrně zpomalený, kdy je rychlost, resp. zrychlení, konstantní. Existují však kolem nás pohyby, kdy např. zrychlení není konstantní. Tehdy se rychlost se mění jinak než rovnoměrně. Příkladem může být pád tělesa ve vzduchu, pohyb tělesa na svahu s proměnným sklonem, rozjíždění automobilu po rovině s proměnnou velikostí pohybové síly, pohyb kyvadla apod.

Běžně lze určovat průměrné hodnoty rychlosti, zrychlení, síly, výkonu, avšak pro detailní popis potřebujeme znát rychlost, zrychlení, sílu, výkon v daném okamžiku, tedy jejich okamžité hodnoty. Tyto a další problémy umožňuje řešit matematická teorie nazývaná diferenciální počet. Vybudování této teorie znamenalo kvalitativní pokrok ve zkoumání závislosti jedné veličiny na veličině druhé.

Diferenciální počet vytvořili v 2. polovině 17. století nezávisle na sobě anglický matematik, fyzik a astronom *Isaac Newton* (1643-1727) a německý filozof a matematik *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716). Spojili tak izolované poznatky a objevy řady svých předchůdců, získávané především geometrickými postupy, do ucelené teorie.

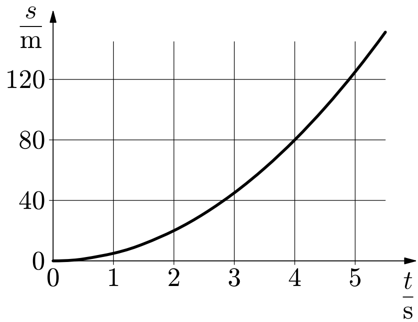
Tato brožurka seznamuje čtenáře se základy použití diferenciálního počtu ve fyzice. Je určena především studentům 2. ročníku gymnázií, kteří již prošli mechanikou, případně termodynamikou a harmonickým kmitáním, a kteří znají průběhy elementárních funkcí. Z tohoto důvodu zde nejsou zařazena témata z elektřiny a magnetismu, z optiky apod. Též se nepředpokládá znalost diferenciálního počtu z matematiky, kde se probírá obvykle až na konci středoškolského studia. Naopak podstata základů diferenciálního počtu je vyložena výhradně na fyzikálních problémech.

1 Pojem derivace

Ukažme si na příkladu volného pádu problematiku průměrné a okamžité rychlosti. Podle středoškolské terminologie je **průměrná rychlost** skalární veličina, **okamžitá rychlost** veličina vektorová.

Dráha uražená při volném pádu je dána vztahem $s = \frac{1}{2}gt^2$. Definičním oborem této funkce jsou vzhledem k fyzikálnímu významu nezáporné časy a grafem část paraboly s vrcholem v počátku umístěná v prvním kvadrantu. Sestavíme pro několik hodnot tabulku (použijeme $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$) a sestrojíme graf:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	5
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	0	5	20	45	80	125



Ukážeme si metodu, jak z funkční závislosti dráhy na čase určit závislost velikosti okamžité rychlosti na čase. [1]

Vypočítejme okamžitou rychlost např. v čase 2 s. Nejprve určíme průměrnou rychlost, např. mezi 2. a 5. sekundou volného pádu. Dráha v čase 2 s je $s(2) = 20$ m, v čase 5 s pak $s(5) = 125$ m. Hledaná průměrná rychlost je

$$v_\mathrm{p}(2;5) = \frac{s(5) - s(2)}{5\ \mathrm{s} - 2\ \mathrm{s}} = 35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Obdobně v kratším časovém intervalu od 2 s do 3 s je průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p}(2;3) = \frac{s(3) - s(2)}{3\ \mathrm{s} - 2\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,,$$

v intervalu od 2 s do 2,1 s je

$$v_\mathrm{p}(2;2{,}1) = \frac{s(2{,}1) - s(2)}{2{,}1\ \mathrm{s} - 2\ \mathrm{s}} = 20{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

[1] Z důvodu jednoduššího vyjadřování budeme v místech, kde nemůže dojít k záměně, používat označení „rychlost“ ve významu „velikost okamžité rychlosti“, jak je to obvyklé v běžné řeči.

Budeme-li pokračovat dále ve zmenšování časového intervalu, bude se odpovídající průměrná rychlost blížit hodnotě hledané okamžité rychlosti v čase 2 s. Jak však zjistit tuto okamžitou rychlost přesně, když uvedená metoda bude vždy určovat pouze rychlost průměrnou, byť na menším a menším časovém intervalu?

Zkusme tento nedostatek obejít obecným vyjádřením průměrné rychlosti od časového okamžiku t do okamžiku $t + \Delta t$. V těchto časech jsou uražené dráhy

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 , \qquad s(t + \Delta t) = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 .$$

Průměrná rychlost v časovém intervalu Δt se pak rovná

$$v_\mathrm{p}(t; t + \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{g}{2}t^2}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) .$$

Obecný výsledek můžeme použít k výpočtu průměrné rychlosti během času Δt, ale navíc nám umožňuje udělat úvahu, kterou jsme předtím provést nemohli. Položíme-li totiž časový interval Δt roven nule, získáme vzorec pro okamžitou rychlost v čase t: $v(t) = gt$. Z něj určíme rychlost v čase 2 s, tj. $v(2) = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Výsledek nás jistě nepřekvapuje, neboť rovnici pro okamžitou rychlost volného pádu $v = gt$ známe, avšak popsaná metoda se ukazuje jako velice účinná při určení okamžité rychlosti složitějších pohybů než je volný pád.

Shrneme-li poznatky o uvedené metodě, můžeme konstatovat, že okamžitou rychlost získáme matematicky přesně, považujeme-li časový interval Δt za nekonečně malý. Formálně lze tuto skutečnost zapsat

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} .} \tag{1.1}$$

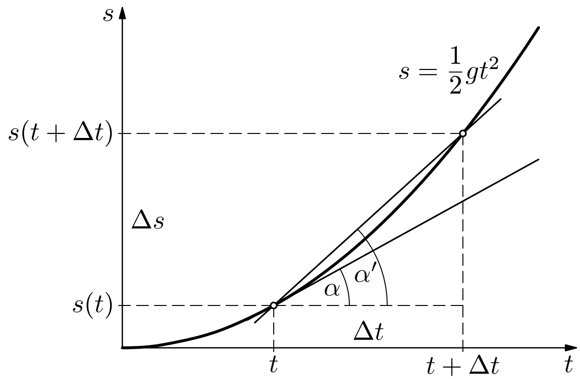
Symbol $\lim\limits_{\Delta t \to 0}$ čteme „limita výrazu pro Δt blížící se (neomezeně) k nule“. Limita je tedy hodnota zlomku, ke které se neomezeně přiblížíme při zmenšování časového intervalu Δt k nule. Symbol $\mathrm{d}t$, **diferenciál času**, představuje nekonečně malý časový interval a symbol $\mathrm{d}s$, **diferenciál dráhy**, jemu odpovídající nekonečně malou změnu dráhy. Podíl obou diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ nazýváme **derivace dráhy podle času**.

Konečně můžeme zformulovat exaktní definici velikosti okamžité rychlosti:

Velikost okamžité rychlosti v čase t je rovna průměrné rychlosti v nekonečně malém časovém intervalu, jehož levou hranicí je čas t.

Nebo: **Velikost okamžité rychlosti v čase t je rovna derivaci dráhy podle času v tomto čase t.**

Podívejme se ještě na grafickou interpretaci derivace. Obrázek představuje detail grafu závislosti dráhy na čase:



Z obrázku je patrné, že zmenšováním časového intervalu Δt se bude dráhový úsek Δs též zmenšovat a jejich podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (průměrná rychlost v časovém intervalu Δt) se bude více blížit okamžité rychlosti v čase t. Současně směrnice sečny se bude více blížit směrnici tečny.

Průměrná rychlost v časovém intervalu je rovna **směrnici sečny** protínající graf v krajních bodech intervalu Δt:

$$\boxed{v_\mathrm{p}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha' \,.}$$

Velikost okamžité rychlosti v libovolném čase t je rovna směrnici tečny sestrojené ke grafu v bodě odpovídajícím času t:

$$\boxed{v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tg} \alpha \,.}$$

Nutno poznamenat, že v uvedených vzorcích platí rovnost s tangentou úhlu pouze v případě, že v příslušném grafickém znázornění úsečka představující jednotkový čas 1 s je shodná s úsečkou znázorňující jednotkovou dráhu 1 m. V opačném případě tangenta skutečného úhlu α' či α v grafu neodpovídá průměrné či okamžité rychlosti.

V předcházejícím příkladu jsme derivováním dráhy podle času získali novou fyzikální veličinu, velikost okamžité rychlosti, i s příslušnou jednotkou $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Mohli jsme se však omezit na vyšetření vztahu mezi číselnými hodnotami dráhy a času, jak je to běžné v matematice.

Po sloučení konstanty $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ s číslem $\frac{1}{2}$ získáme jednodušší rovnici $s = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot t^2$, resp. $\{s\} = 5\{t\}^2$, kde symboly $\{s\}$, $\{t\}$ rozumíme číselné hodnoty dráhy a času. Z důvodu stručnějšího a přehlednějšího vyjádření budeme složené závorky vynechávat a fyzikální veličiny vystupující v rovnici chápat ve smyslu matematickém, tj. pouze jako číslo bez fyzikální jednotky. V tomto smyslu má uvažovaná funkční závislost tvar $s = 5t^2$. Pak

$$s(t) = 5t^2\,, \qquad s(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2\,.$$

Velikost průměrné rychlost v časovém intervalu Δt se pak rovná

$$v_{\mathrm{p}}(t; t + \Delta t) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{5(t + \Delta t)^2 - 5t^2}{\Delta t} = 5(2t + \Delta t)\,.$$

Položíme-li $\Delta t = 0$, dostaneme vzorec pro číselnou hodnotu okamžité rychlosti v čase t: $v(t) = 10t$. Z něj určíme rychlost v čase 2 s, tj. po doplnění jednotky $v(2) = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Takovýto „matematický“ postup, ve kterém se omezíme jen na vztahy mezi číselnými hodnotami veličin, budeme ve fyzikálních úlohách používat v případech, kdy se vyšetřovaný výraz dosazením číselných hodnot konstant zjednoduší. Měli bychom však řešení opatřit poznámkou, ve které tuto skutečnost uvedeme (viz příklad 3.1, nebo výsledky úloh 5.2, 5.4).

Příklad 1.1: Určete závislost rychlosti na čase $v = v(t)$ pro rovnoměrně zrychlený pohyb, jehož závislost dráhy na čase je dána funkcí $s = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$.

Řešení:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}a(t + \Delta t)^2 + v_0(t + \Delta t) + s_0\right] - \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0\right]}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(at + v_0 + \frac{1}{2}a\Delta t\right) = v_0 + at\,.$$

Úloha 1.1: Určete závislost rychlosti na čase $v = v(t)$ pohybu, pro nějž platí $s = At^3 + Bt$.

Předchozí postup, jak ze závislosti $s = s(t)$ získat závislost $v = v(t)$, platí obecně, avšak u složitějších funkcí je obtížné, ne-li nemožné, řešení tímto způsobem nalézt. Naštěstí máme k dispozici souhrn pravidel a vzorců, kterými můžeme celý postup výrazně zefektivnit. Tento souhrn matematických vět tvoří **základ diferenciálního počtu**.

V následujícím přehledu derivací elementárních funkcí a pravidel pro derivování si čas t jakožto proměnnou fyzikální veličinu nahradíme obecnou proměnnou x bez specifického fyzikálního významu. Místo funkční závislosti rychlosti na čase $v(t)$ užijeme obecné označení funkce $f(x),\ g(x)$.

Derivace elementárních funkcí D1 - D10

(D1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} konst = 0$ (D2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$

(D3) $\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} = 2x$ (D4) $\dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$

(D5) $\dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$ (D6) $\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$

(D7) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (D8) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{cotg}\, x}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(D9) $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ (D10) $\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$

Vzorce platí pro taková x, pro která je současně definovaná derivovaná funkce i výsledek její derivace. Např. v (D10) je výraz $\dfrac{1}{x}$ derivací funkce $\ln x$ pouze pro $x > 0$. Pro $x < 0$ je výraz $\dfrac{1}{x}$ sice definován, ale nemůže být na tomto intervalu derivací funkce $\ln x$, neboť ta zde neexistuje (není definována).

Rozmanitý je vzorec (D4), v němž může být n libovolné reálné číslo, nikoliv jen číslo přirozené. Číslu n pak odpovídá definiční obor funkce. Pro n celé záporné nepatří nula do definičního oboru, pro n reálné necelé je definičním oborem množina kladných reálných čísel. Tedy např. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^5 = 5x^4$ platí pro všechna reálná čísla x, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-3} = -3x^{-4}$ platí pro $x \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{5}{3}} = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-\pi} = -\pi\, x^{-\pi-1}$ platí pouze pro $x > 0$.

Pravidla pro derivování P1 - P5

(P1)	Násobení funkce konstantou	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(konst \cdot f(x)) = konst \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$
(P2)	Součet (rozdíl) funkcí	$\frac{\mathrm{d}(f(x) \pm g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$
(P3)	Součin funkcí	$\frac{\mathrm{d}(f(x) \cdot g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$
(P4)	Podíl funkcí	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}{(g(x))^2}$
(P5)	Složená funkce	$\frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$

Složenou funkcí je např. funkce $y(t) = \sin \omega t$, kde $\varphi(t) = \omega t$ je vnitřní funkce a $y(\varphi(t)) = \sin \varphi(t)$ je vnější funkce. Podle pravidla (P5) je derivace složené funkce rovna součinu derivace vnější funkce podle vnitřní funkce a derivace vnitřní funkce podle proměnné x. V našem případě je

$$\frac{\mathrm{d}\sin(\omega t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sin\varphi(t)}{\mathrm{d}\varphi(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\omega t}{\mathrm{d}t} = \cos\varphi(t) \cdot \omega\,.$$

Příklad 1.2: Řešte příklad 1.1 užitím pravidel pro derivování.

Řešení: Podle definice okamžité rychlosti je

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0\right)\,.$$

Užitím pravidla (P2) můžeme psát

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}at^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 t) + \frac{\mathrm{d}s_0}{\mathrm{d}t}\,.$$

Na první dva členy aplikujeme pravidlo (P1), na třetí člen vzorec (D1):

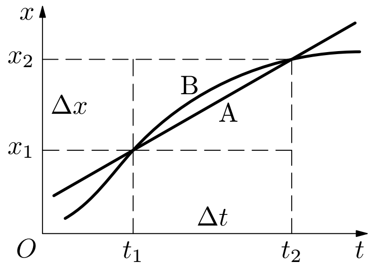
$$v(t) = \frac{1}{2}a\frac{\mathrm{d}t^2}{\mathrm{d}t} + v_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + 0\,.$$

Nyní užijeme vzorce (D3) a (D2): $v(t) = at + v_0$.

Úloha 1.2: Řešte úlohu 1.1 užitím pravidel pro derivování.

Derivování funkcí si můžete procvičit v Dodatku.

2 Časová derivace fyzikální veličiny



Ve středoškolské fyzice se často setkáváme s výrazem $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, kde x je určitá fyzikální veličina (dráha, rychlost, energie atd.). Mění-li se veličina x rovnoměrně, tj. $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ je pro libovolný časový interval Δt konstantní, vyjadřuje veličina $y = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ stálou časovou změnu veličiny x (graf A). Mění-li se veličina x nerovnoměrně, vyjadřuje veličina $y = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ pouze průměrnou časovou změnu veličiny x v určitém časovém intervalu (graf B). Okamžitou časovou změnu veličiny x pak vyjádříme $y = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Např. $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ vyjadřuje stálou velikost okamžitého zrychlení přímočarého rovnoměrně zrychleného pohybu nebo průměrné zrychlení přímočarého pohybu nerovnoměrného. Velikost okamžitého zrychlení jakéhokoliv zrychleného přímočarého pohybu pak vyjádříme $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. (Obecně okamžité zrychlení jakéhokoliv pohybu pro trajektorii libovolného tvaru vyjádříme $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, s derivací vektoru se však seznámíme v následující kapitole.)

Kromě okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení lze stejným způsobem zavést řadu dalších fyzikálních veličin, resp. jejich okamžitých hodnot. Okamžitá časová změna nemusí vystupovat pouze v definici, nýbrž může být součástí fyzikálního zákona. Uveďme několik příkladů:

Okamžitá úhlová rychlost	$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$
Okamžité úhlové zrychlení	$\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
Velikost okamžité síly při zrychleném přímočarém pohybu (p je velikost okamžité hybnosti)	$F = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$
Okamžitý výkon	$P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$
Napětí indukované v cívce	$u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Příklad 2.1: Určete fyzikální význam veličiny úhlová rychlost ve vztazích

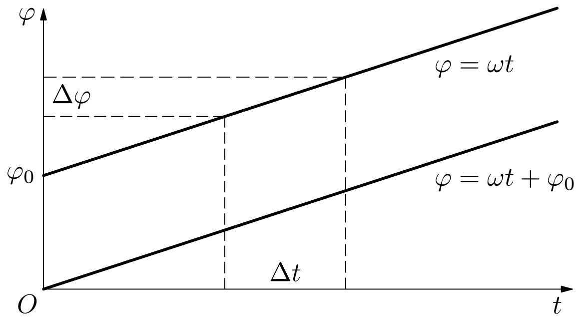
$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \ \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \ \omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

pro zrychlený otáčivý pohyb kolem pevné osy.

Řešení: Vztah $\omega = \frac{\varphi}{t}$ vyjadřuje stálou úhlovou rychlost u rovnoměrného rotačního pohybu, jestliže v nulovém čase je opsaný úhel nulový. Opsaný úhel φ je přímo úměrný času t a úhlová rychlost ω je konstantou úměrnosti této přímé úměrnosti $\varphi = \omega t$.

Vztah $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ může vyjadřovat jednak průměrnou úhlovou rychlost u jakéhokoliv zrychleného rotačního pohybu, kde $\Delta\varphi$ je změna úhlu otočení a Δt doba, během které k uvažovanému otočení došlo, nebo může vyjadřovat stálou úhlovou rychlost rovnoměrného otáčivého pohybu, přičemž v nulovém čase může být opsán počáteční nenulový úhel φ_0. Veličina ω je pak směrnice přímky v lineární závislosti $\varphi = \omega t + \varphi_0$.

Vztah $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ vyjadřuje okamžitou úhlovou rychlost jakéhokoliv zrychleného rotačního pohybu.



Příklad 2.2: Hmotný bod koná po dobu 8 s přímočarý pohyb, jehož dráha je určena funkcí

$$s(t) = -\frac{1}{12}t^3 + 2t^2 .$$

Stanovte závislosti rychlosti na čase a zrychlení na čase. Sestrojte grafy $s = s(t), \ v = v(t), \ a = a(t)$.

Řešení: Rychlost určíme jako časovou derivaci dráhy:

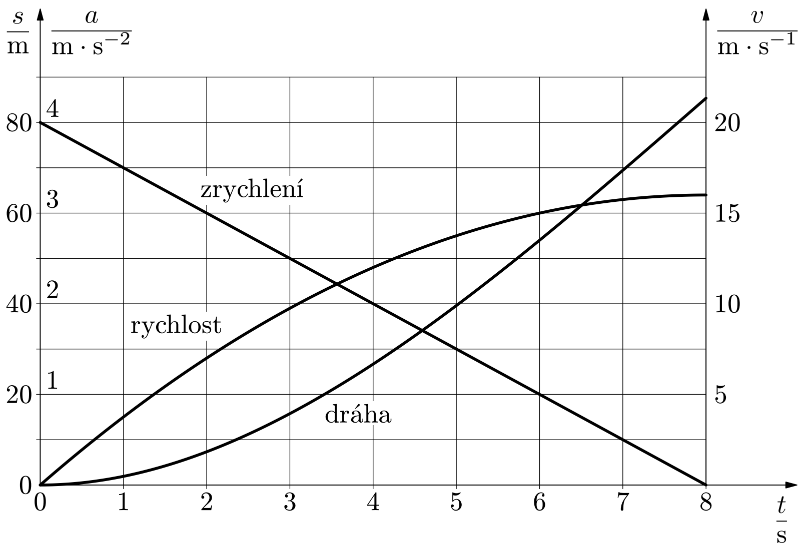
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{12}t^3 + 2t^2\right) = -\frac{t^2}{4} + 4t .$$

Zrychlení určíme jako derivaci rychlosti podle času:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{4}t^2 + 4t\right) = -0{,}5t + 4\,.$$

Rozborem rovnic zjistíme následující vlastnosti. Pohyb začíná z klidu, neboť v nulovém čase má hmotný bod nulovou rychlost. Podle rovnice v zadání má též nulovou počáteční dráhu. Hmotný bod se začíná uvádět do pohybu s počátečním zrychlením $a(0) = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Zrychlení po celou uvažovanou dobu lineárně klesá, tedy rychlost roste stále pomaleji. V čase 8 s dosáhne zrychlení nulové hodnoty a rychlost se ustálí na konečné maximální hodnotě. Pokud by pohyb pokračoval i nadále s nulovým zrychlením, dosažená rychlost by se neměnila a dráha by lineárně rostla.

Grafem rychlosti je část paraboly s vrcholem v čase 8 s, grafem dráhy část kubické paraboly (křivky 3. stupně). Všechny tři závislosti jsou znázorněny v jednom obrázku.



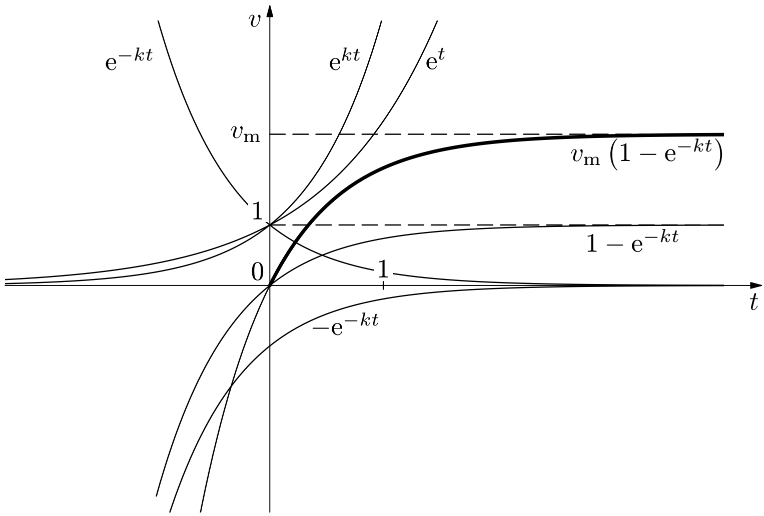
Příklad 2.3: Stanovte závislost $a = a(t)$ přímočarého pohybu daného rovnicí

$$v(t) = v_{\mathrm{m}}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)\,,$$

kde $k > 0$. Sestrojte grafy $v = v(t)$, $a = a(t)$.

Řešení: Sestrojení grafů funkcí vyžaduje určitou zběhlost. Můžeme postupovat např. tak, že sestrojíme základní funkci $y = \mathrm{e}^t$, kterou postupně upravujeme na e^{kt} (deformace ve vodorovném směru), e^{-kt} (převrácení kolem svislé osy), $-\mathrm{e}^{-kt}$ (převrácení kolem vodorovné osy), $1-\mathrm{e}^{-kt}$ (posunutí o jednotku nahoru), $v_\mathrm{m}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)$ (deformace ve svislém směru). V čase $t=0$ je rychlost nulová, graf prochází počátkem. Pro velmi velké časy jde výraz e^{-kt} k nule, a tím rychlost v k hodnotě v_m . Říkáme, že limita funkce $v(t)$ pro t jdoucí k nekonečnu je rovna hodnotě v_m, což zapíšeme

$$\lim_{t\to\infty} v_\mathrm{m}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)=v_\mathrm{m}\,.$$



Zrychlení určíme jako časovou derivaci rychlosti:

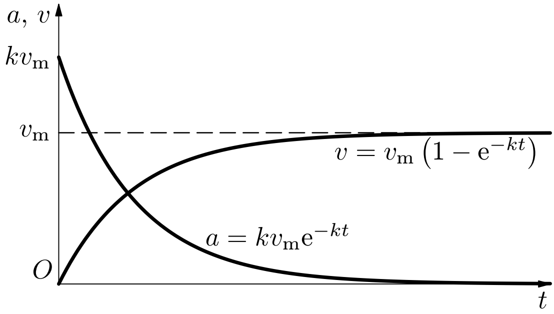
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v_\mathrm{m}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)=v_\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\mathrm{e}^{-kt}\right)=v_\mathrm{m}\left(0-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-kt}\right)=$$

$$=v_\mathrm{m}\left(-\mathrm{e}^{-kt}\right)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-kt)=v_\mathrm{m}\left(-\mathrm{e}^{-kt}\right)\cdot(-k)=kv_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-kt}\,.$$

Graf sestrojíme podle funkce e^{-kt}, kterou již známe, vynásobením konstantou kv_m. V čase $t=0$ je zrychlení kv_m, v čase t rostoucím nade všechny meze je zrychlení nulové, neboť

$$\lim_{t\to\infty} kv_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-kt}=0\,.$$

V obrázku jsou pro porovnání sestrojeny graf zrychlení i předchozí graf rychlosti.



Uvedený pohyb koná těleso urychlované konstantní silou, kde proti pohybu působí síla odporu prostředí, která je v každém okamžiku přímo úměrná rychlosti. Takto např. padá v tíhovém poli vodní kapička, pokud její obtékání částicemi vzduchu můžeme považovat za laminární.

Příklad 2.4: Stanovte závislosti $v = v(t)$, $a = a(t)$ přímočarého pohybu daného rovnicí dráhy

$$s(t) = \frac{A^2 t}{At + B}\,,$$

kde A, $B > 0$. Sestrojte grafy $s = s(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$.

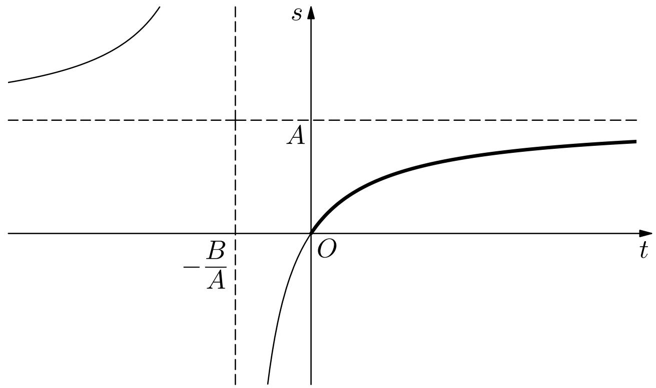
Řešení: Dráha je určena lineární lomenou funkcí typu $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kterou převedeme na tvar $y = N + \dfrac{K}{x-M}$. Grafem pak bude hyperbola s rovnicí $y = \dfrac{K}{x}$ s posunutým počátkem soustavy souřadnic do bodu o souřadnicích $[M, N]$. Danou rovnici dráhy podle tohoto návodu postupně upravujeme:

$$s(t) = \frac{A^2 t}{At+B} = \frac{A^2 t + AB - AB}{At+B} = \frac{A(At+B) - AB}{At+B} = A - \frac{B}{t + \dfrac{B}{A}}\,.$$

Grafem je tedy část hyperboly dané rovnicí $s'(t) = \dfrac{-B}{t}$ s posunutým počátkem soustavy souřadnic do bodu $\left[-\dfrac{B}{A}, A\right]$ a větve hyperboly jsou umístěné ve 2. a 4. kvadrantu. Můžeme též postupovat tak, že sestrojíme grafy funkcí

$$\frac{1}{t}\,,\quad \frac{B}{t}\,,\quad \frac{B}{t+\dfrac{B}{A}}\,,\quad \frac{-B}{t+\dfrac{B}{A}}\,,\quad A - \frac{B}{t+\dfrac{B}{A}}\,.$$

V nulovém čase je dráha nulová, pro čas t blížící se nekonečnu je dráha rovna konstantě A.



Rychlost určíme jako derivaci dráhy podle času:

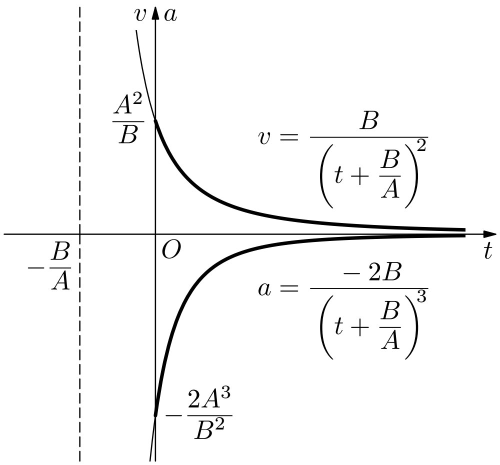
$$v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A - \frac{B}{t + \frac{B}{A}}\right) = -B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t + \frac{B}{A}\right)^{-1} = B\left(t + \frac{B}{A}\right)^{-2} = \frac{B}{\left(t + \frac{B}{A}\right)^{2}}\,.$$

Grafem je část větve hyperboly 2. stupně. V čase $t = 0$ je $v(0) = \frac{A^2}{B}$, pro čas $t \to \infty$ je $v(t) \to 0$, tedy $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

Zrychlení určíme jako derivaci rychlosti podle času:

$$a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[B\left(t + \frac{B}{A}\right)^{-2}\right] = B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t + \frac{B}{A}\right)^{-2} = \frac{-\,2B}{\left(t + \frac{B}{A}\right)^{3}}\,.$$

Grafem je část větve hyperboly 3. stupně. V čase $t = 0$ je $a(0) = -\frac{2A^3}{B^2} < 0$, pro čas $t \to \infty$ je $a(t) = 0$. Výsledek je v každém časovém okamžiku záporný, neboť velikost rychlosti s časem klesá. Veličina a tedy nevyjadřuje velikost zrychlení, nýbrž jeho *souřadnici* (více v 3. kapitole).



Příklad 2.5: Setrvačník se rozbíhá tak, že úhel otočení je přímo úměrný druhé mocnině času. První otočka byla dokončena v čase $t_1 = 5$ s. Určete okamžitou frekvenci otáčení v čase $t_2 = 18$ s a počet provedených otáček v tomto čase od začátku pohybu.

Řešení: Jelikož pro úhel otočení platí $\varphi = kt^2$, je frekvence otáčení

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(kt^2) = \frac{1}{\pi}kt\,.$$

Konstantu úměrnosti k lze vyjádřit $k = \frac{\varphi}{t^2} = \frac{2\pi}{t_1^2}$. Po dosazení je časová závislost frekvence

$$f = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{t_1^2}t = \frac{2t}{t_1^2}\,.$$

V čase $t = t_2$ je okamžitá frekvence $f(t_2) = \frac{2t_2}{t_1^2} = 1{,}44$ Hz.

Počet otáček N v čase t je dán podílem celkového úhlu otočení

$$\varphi = kt^2 = 2\pi\frac{t^2}{t_1^2}$$

a úhlu 2π při jedné otáčce:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{kt^2}{2\pi} = \frac{t^2}{t_1^2}\,.$$

V čase $t = t_2$ je $N(t_2) = \frac{t_2^2}{t_1^2} = 12{,}96$.

Příklad 2.6: Při nafukování pružného balonu tvaru koule roste jeho objem rovnoměrně rychlostí 100 cm^3 za sekundu. Jakou rychlostí roste jeho poloměr v okamžiku, kdy jeho objem je 1 000 cm^3?

Řešení: Označme $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ okamžitou rychlost zvětšování poloměru r balonu a $w = \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ okamžitou rychlost zvětšování jeho objemu V. Pak je

$$w = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{4}{3}\,\pi(r(t))^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 v\,,$$

z čehož $v = \dfrac{w}{4\pi r^2}$. Poloměr vyjádřený pomocí objemu je $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\,.$

Po dosazení je hledaná rychlost $\quad v = \dfrac{w}{4\pi\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{16\pi^2}}} = \dfrac{w}{\sqrt[3]{36\pi V^2}}\,.$

Číselně pro $w = 100\ \mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a $V = 1\,000\ \mathrm{cm}^3$ dostaneme $v = 0{,}21\ \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Příklad 2.7: Sestrojte pro přímočarý pohyb rovnoměrně zrychlený a pro přímočarý pohyb se stálým výkonem urychlující síly grafy závislostí

a) rychlosti na čase
b) zrychlení na čase
c) kinetické energie na čase
d) výkonu na čase.

Těleso se začíná pohybovat z klidu.

Řešení:

a) Rychlost je u rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu přímo úměrná času $\quad v = at\,, \quad$ kde $\quad a = konst.$
U pohybu se stálým výkonem roste kinetická energie pohybu rovnoměrně s časem podle vztahu

$$\frac{1}{2}mv^2 = Pt, \text{ kde } P = konst.$$

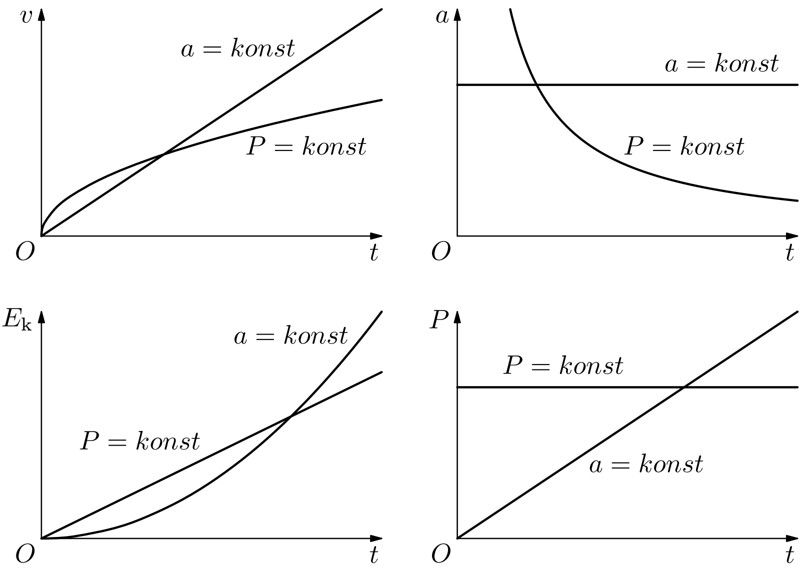
Rychlost pak je $v = \sqrt{\dfrac{2Pt}{m}}$, grafem je část paraboly.

b) Zrychlení a je u rovnoměrně zrychleného pohybu nezávislé na čase, tj. $a = konst.$
U pohybu se stálým výkonem dostaneme zrychlení jako derivaci rychlosti podle času:

$a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\dfrac{2Pt}{m}} = \sqrt{\dfrac{P}{2mt}}$, grafem je větev hyperboly 2. stupně.
Zrychlení pohybu se stálým výkonem lze též odvodit bez derivace:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P}{mv} = \frac{P}{m\sqrt{\dfrac{2Pt}{m}}} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}\,.$$

c) Pro pohyb rovnoměrně zrychlený je $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}ma^2t^2$.
Pro pohyb se stálým výkonem je $E_\mathrm{k} = W = Pt$.



d) Závislost okamžitého výkonu na čase určíme jako časovou derivaci kinetické energie nebo práce. Pro pohyb rovnoměrně zrychlený pak užitím kinetické energie je

$$P = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2\,, \quad \text{kde} \quad v = at\,,$$

tedy $P = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{1}{2}ma^2t^2 = ma^2t$.
Užitím práce obdobně dostaneme

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Fs) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ma \cdot \frac{1}{2}at^2\right) = ma^2t\,.$$

Ale obejdeme se i bez derivace: $P = Fv = mav = ma^2t$. Výkon je přímo úměrný času.
U pohybu se stálým výkonem je výkon konstantní $P = konst.$

Příklad 2.8: Těleso o hmotnosti $m = 0{,}40$ kg zavěšené na pružině kmitá s periodou $T = 0{,}25$ s a amplitudou výchylky $y_\mathrm{m} = 0{,}050$ m. Určete maximální velikost p_m okamžitého výkonu p, s kterým se mění potenciální energie oscilátoru na kinetickou a naopak.

Řešení: Během kmitů oscilátoru roste (klesá) potenciální energie

$$E_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{2}ky^2(t) = \frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 \sin^2 \omega t$$

se stejným výkonem, s nímž klesá (roste) kinetická energie

$$E_\mathrm{k}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 y_\mathrm{m}^2 \cos^2 \omega t\,,$$

tedy $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t}$. Zvolme např.

$$p = \frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 \cdot 2\sin\omega t \cdot \cos\omega t \cdot \omega = \frac{1}{2}k\omega y_\mathrm{m}^2 \sin 2\omega t\,.$$

Dostali jsme sinusoidu s amplitudou $p_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}k\omega y_\mathrm{m}^2$. Ze vztahu $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ vyjádříme tuhost $k = \dfrac{4\pi^2}{T^2}m$, užijeme $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ a dosadíme. Maximální výkon pak je

$$p_\mathrm{m} = \frac{4\pi^3}{T^3}my_\mathrm{m}^2 = 7{,}9\ \mathrm{W}\,.$$

K témuž výsledku bychom dospěli volbou $p = \dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t}$.

Úloha 2.1: Dráha hmotného bodu je určena rovnicí $s(t) = A\sqrt{t^3}$. Stanovte závislosti rychlosti na čase a zrychlení na čase. Po nastudování řešeného příkladu 2.7 rozhodněte, o jaký typ pohybu jde.

Úloha 2.2: Nádrž má tvar kužele o poloměru R a výšce h_0. Kužel je špičkou dolů, osa je svislá. Do nádrže vtéká voda se stálým objemovým tokem Q_V. ($[Q_V] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.)

a) Určete závislost výšky h hladiny na čase.
b) Určete závislost rychlosti stoupání hladiny na čase.
c) Určete závislost zrychlení stoupání hladiny na čase.

Čas měříme od okamžiku, kdy začíná voda vtékat do prázdné nádrže.

Úloha 2.3: Kapka vody tvaru koule o počátečním poloměru r_0 se odpařuje tak, že její poloměr se rovnoměrně zmenšuje podle rovnice $r = r_0 - kt$. Na každou molekulu v kapce připadá objem V_1.

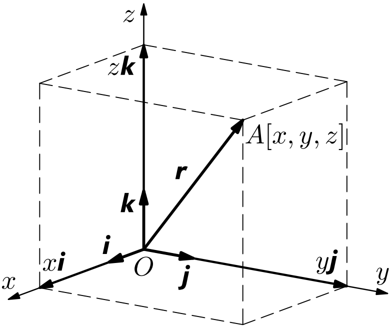
a) Určete okamžitou rychlost změny poloměru kapky.
b) Určete okamžitou rychlost změny povrchu kapky.
c) Určete závislost počtu N molekul v kapce na čase.
d) Určete okamžitou rychlost vypařování, tj. časovou změnu počtu molekul v kapce.

Úloha 2.4: Matematické kyvadlo délky l a hmotnosti m kmitá s maximální výchylkou y_{m}. Určete maximální výkon p_{m}, s jakým se mění kinetická energie na potenciální a naopak. Řešte obecně, pak pro hodnoty $l = 1{,}20$ m, $m = 0{,}20$ kg, $y_{\mathrm{m}} = 5{,}0$ cm.

3 Derivace vektoru

Polohu bodu A v prostoru můžeme určit v kartézské soustavě trojicí souřadnic x, y, z, což zapisujeme $A[x, y, z]$. Jinou možností určení polohy je užití tzv. **polohového vektoru**.

Polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ určujícím polohu bodu A rozumíme vektor s počátečním bodem v počátku soustavy souřadnic a s koncovým bodem A. Zaveďme nyní $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jako jednotkové vektory, tj. $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$, ve směru souřadnicových os x, y, z. Pak polohový vektor $\boldsymbol{r}$ můžeme získat složením násobků těchto vektorů souřadnicemi x, y, z:



$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,.$$

Obráceně můžeme též vektor $\boldsymbol{r}$ rozložit na složky $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ do směrů souřadnicových os. Přitom trojicí x, y, z rozumíme nejen souřadnice bodu A, nýbrž též souřadnice polohového vektoru $\boldsymbol{r}$, což zapisujeme

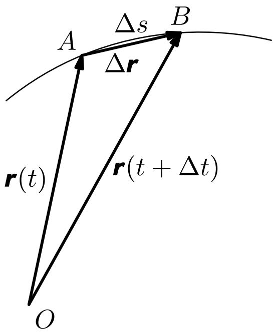
$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)\,.$$

Velikost polohového vektoru můžeme vyjádřit Pythagorovou větou zobecněnou pro třírozměrný prostor:

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

V úvodním článku jsme si ukázali, že derivace dráhy podle času $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ má význam velikosti okamžité rychlosti. Zkoumejme nyní fyzikální význam derivace, jestliže skalární veličinu dráha nahradíme polohovým vektorem.

Předpokládejme, že během času Δt přejde hmotný bod po křivce z bodu A do bodu B, tj. urazí dráhu Δs. Jeho původní polohový vektor $\boldsymbol{r}(t)$ se tak změní na polohový vektor $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$. Pak z hlediska skládání vektorů můžeme psát



$$\boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t)$$

nebo též

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\,.$$

Vydělíme-li poslední rovnici časovým intervalem Δt, dostaneme výraz udávající jakousi průměrnou časovou změnu vektoru $\boldsymbol{r}$ během doby Δt:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \,.$$

Budeme-li časový interval Δt zkracovat, bude se hodnota výrazu více blížit jakési okamžité časové změně vektoru $\boldsymbol{r}$. Pro nekonečně malou změnu můžeme v analogii s rovnicí (1.1) psát

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \,.$$

Uvážíme-li, že velikost diferenciálu změny polohového vektoru $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ je rovna diferenciálu dráhy $\mathrm{d}s$ a že vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ má směr tečny k trajektorii v uvažovaném bodě A, má podíl diferenciálů $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ význam vektoru okamžité rychlosti

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \,.$$

Proveďme nyní tuto naznačenou derivaci vektoru $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ podle času. Souřadnice x, y, z jsou obecně funkcemi času, jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou konstanty. Užitím pravidel (P2) a (P1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(x,y,z)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\boldsymbol{j}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z\boldsymbol{k}) = \\ &= \boldsymbol{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{k}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = (v_x, v_y, v_z) \,.\end{aligned}$$

Význam právě provedeného odvození spočívá v tom, že derivaci vektoru můžeme nahradit derivacemi jeho složek, čehož běžně využíváme při řešení úloh. Je tedy rovnice

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

ekvivalentní trojici rovnic

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \,, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \,.$$

Shrneme-li naše úvahy, můžeme pro vektor okamžité rychlosti psát

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

a pro jeho velikost

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,.$$

Analogicky můžeme psát pro vektor okamžitého zrychlení a pro vektor okamžité síly rovnice

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})\,,$$

nebo v souřadnicích

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_x)\,, \quad F_y = \frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_y)\,, \quad F_z = \frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv_z)\,.$$

Příklad 3.1: Pohyb bodu v rovině je dán parametrickými rovnicemi

$$x = 15t^2\,, \quad y = 30 - 20t^2\,.$$

Určete tvar trajektorie, velikost rychlosti a velikost zrychlení pohybu.

Poznámka: Dané parametrické rovnice popisují vztahy mezi číselnými hodnotami veličin, jak je to obvyklé v matematice. Stejný charakter mají proto i rovnice v řešení.

Řešení: Rovnici trajektorie získáme vyloučením časového parametru t:

$$y = 30 - \frac{4}{3}x\,, \text{ což je rovnice přímky.}$$

Každá souřadnice rychlosti v_x, v_y je dána derivací příslušné souřadnice polohového vektoru podle času:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 30t\,, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -40t\,.$$

Výslednou rychlost určíme jako vektorový součet

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = 30t \cdot \boldsymbol{i} - 40t \cdot \boldsymbol{j}\,,$$

její velikost vypočítáme podle Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(30t)^2 + (-40t)^2} = 50t\,.$$

Obdobně je

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 30\,, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -40\,, \quad \boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = 30\boldsymbol{i} - 40\boldsymbol{j}\,,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 50\,.$$

Pohyb je přímočarý rovnoměrně zrychlený se zrychlením o velikosti $50\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ a začínající z klidu v bodě $[0, 30]$.

Příklad 3.2: Těleso bylo v homogenním tíhovém poli vrženo šikmo vzhůru pod elevačním úhlem α. Místo vrhu má souřadnice $[x_0, y_0]$. Napište rovnice pro souřadnice polohového vektoru jako funkce času $x = x(t)$, $y = y(t)$ a pomocí derivace odvoďte závislosti souřadnic rychlosti v_x, v_y a souřadnic zrychlení a_x, a_y na čase. Určete dále závislost velikosti okamžité rychlosti a velikosti okamžitého zrychlení na čase.

Řešení: Šikmý vrh můžeme rozložit na dva nezávislé pohyby konané současně – na rovnoměrný přímočarý pohyb ve vodorovném směru stálou rychlostí $v_0 \cos\alpha$ a na svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 \sin\alpha$. Pro souřadnice polohového vektoru platí:

$$x(t) = x_0 + v_0 t\cos\alpha\,, \qquad y(t) = y_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Souřadnice vektoru rychlosti dostaneme jako derivace příslušných souřadnic polohového vektoru:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0\cos\alpha\,, \qquad v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0\sin\alpha - gt\,.$$

Obdobně dostaneme souřadnice vektoru zrychlení:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g\,.$$

Velikost okamžité rychlosti získáme z jejích složek:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}\,.$$

Analogicky dostaneme velikost okamžitého zrychlení, řešení je triviální, neboť $a_x = 0$:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g\,.$$

Příklad 3.3: Automobil se pohybuje přímočaře stálou rychlostí o velikosti v_0 po vodorovné silnici. V dezénu pneumatiky o poloměru R se zachytil kamínek. Zvolme počátek vztažné soustavy pevně spojené s vozovkou v místě, kde se nachází střed pneumatiky v čase $t = 0$, směr osy x shodně se směrem pohybu automobilu a směr osy y vzhůru. V čase $t = 0$ se kamínek dotýká vozovky.

a) Určete souřadnice x, y polohového vektoru kamínku, souřadnice v_x, v_y jeho rychlosti a souřadnice a_x, a_y jeho zrychlení jako funkce času.
b) V téže vztažné soustavě určete velikost v rychlosti a velikost a zrychlení kamínku jako funkce času.
c) Určete největší a nejmenší velikost rychlosti kamínku vzhledem k vozovce.

Řešení:

a) Kamínek koná vzhledem k vozovce dva na sobě nezávislé pohyby, společně s automobilem pohyb posuvný rovnoměrný ve směru osy x a vzhledem k automobilu rovnoměrný pohyb po kružnici. Souřadnice kamínku ve zvolené soustavě souřadnic splňují rovnice

$$x = v_0 t - R \sin \frac{v_0}{R} t\,, \qquad y = -R \cos \frac{v_0}{R} t\,.$$

Postupným derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 - v_0 \cos \frac{v_0}{R} t = v_0 \left(1 - \cos \frac{v_0}{R} t\right)\,, \\
v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin \frac{v_0}{R} t\,, \\
a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0^2}{R} \sin \frac{v_0}{R} t\,, \\
a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0^2}{R} \cos \frac{v_0}{R} t\,.
\end{aligned}$$

b) Pro velikosti rychlosti a zrychlení platí:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \cos \frac{v_0}{R} t\right)^2 + v_0^2 \sin^2 \frac{v_0}{R} t} =$$

$$= v_0 \sqrt{1 - 2 \cos \frac{v_0}{R} t + \cos^2 \frac{v_0}{R} t + \sin^2 \frac{v_0}{R} t} = v_0 \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{v_0}{R} t\right)}\,,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2} \sin^2 \frac{v_0}{R} t + \frac{v_0^4}{R^2} \cos^2 \frac{v_0}{R} t} = \frac{v_0^2}{R}\,.$$

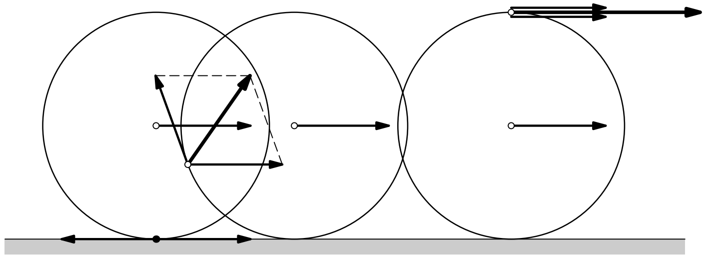
c) Podle výsledku úlohy b) je velikost rychlosti minimální pro

$$\cos\frac{v_0}{R}t = 1\,, \qquad \frac{v_0}{R}t = 2k\pi\,, \qquad t = k\cdot\frac{2\pi R}{v_0} = kT\,,$$

kdy $v_{\min} = 0$ a maximální pro

$$\cos\frac{v_0}{R}t = -1\,, \qquad \frac{v_0}{R}t = (2k+1)\pi\,, \qquad t = (2k+1)\cdot\frac{\pi R}{v_0} = kT + \frac{T}{2}\,,$$

kdy $v_{\max} = 2v_0$. Minimum nastane vždy při dotyku kamínku s vozovkou, maximum vždy v nejvyšší poloze kamínku. T je perioda otáčení kola.



Úloha 3.1: Harmonický pohyb hmotného bodu získáme jako kolmý průmět rovnoměrného pohybu tohoto bodu po kružnici do přímky ležící v rovině této kružnice. Zvolíme-li na uvažované přímce souřadnicovou osu y s počátkem v průmětu středu kružnice, je okamžitá výchylka harmonických kmitů dána rovnicí

$$y = y_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \varphi_0)\,.$$

Určete závislosti $v_y = v_y(t)$, $a_y = a_y(t)$. Do jednoho obrázku sestrojte grafy všech tří závislostí pro $\varphi_0 = 0$, $\omega = \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $y_{\mathrm{m}} = 0{,}20\ \mathrm{m}$ v časovém intervalu $\langle 0, 5\ \mathrm{s}\rangle$.

Úloha 3.2*: Okamžitá výchylka tlumených harmonických kmitů s nulovou počáteční fází je dána rovnicí

$$y = y_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-bt}\sin\omega t\,.$$

Určete závislosti $v_y = v_y(t)$, $a_y = a_y(t)$. Pomocí počítače sestrojte grafy všech tří závislostí pro $y_{\mathrm{m}} = 5{,}0\ \mathrm{cm}$, $\omega = 10\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $b = 2{,}0\ \mathrm{s^{-1}}$ v časovém intervalu $\langle 0, 1\ \mathrm{s}\rangle$.

Úloha 3.3: Koncový bod A velké ručičky věžních hodin je ve vzdálenosti $r = 2{,}0\ \mathrm{m}$ od osy otáčení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic v rovině ciferníku s počátkem ve středu ciferníku tak, že osa x směřuje k hodnotě 3 h a osa y k hodnotě 12 h. Za počáteční okamžik považujme čas 12:00 h.

a) Určete souřadnice x, y polohového vektoru bodu A a pomocí derivace souřadnice rychlosti a souřadnice zrychlení bodu A jako funkce času.

b) Ze souřadnic odvoďte velikosti okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení bodu A. Řešte též číselně.

Úloha 3.4: Pohyb hmotného bodu v prostoru je popsán časovými rovnicemi

$$x = r\cos\omega t\,, \qquad y = r\sin\omega t\,, \qquad z = v_0 t\,.$$

a) Určete souřadnice v_x, v_y, v_z rychlosti $\boldsymbol{v}$ a její velikost v.
b) Určete souřadnice a_x, a_y, a_z zrychlení $\boldsymbol{a}$ a jeho velikost a.
c) Vysvětlete, proč při $v = konst$ je $a \neq 0$.
d) Popište slovně tvar trajektorie a způsob pohybu hmotného bodu po ní.

Úloha 3.5: Řešte příklad 3.3 pro ventilek ve vzdálenosti $r < R$ od osy otáčení, který se v nulovém čase nachází nad osou otáčení kola. Ostatní podmínky úlohy zůstávají.

Úloha 3.6: Pohyb tělesa je popsán časovou závislostí polohového vektoru:

$$\boldsymbol{r}(t) = v_0 t \cdot \boldsymbol{i} - y_\mathrm{m}\cos\omega t \cdot \boldsymbol{j} + \left(h_0 - \frac{1}{2}gt^2\right)\cdot \boldsymbol{k}\,.$$

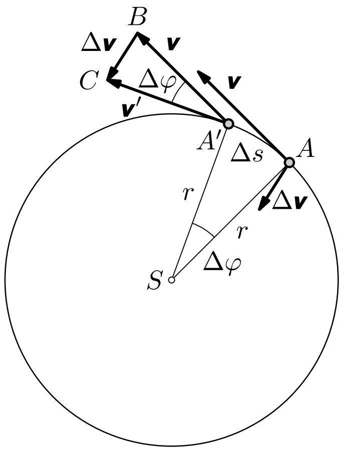
a) Popište slovně daný pohyb.
b) Napište rovnici pro rychlost $\boldsymbol{v}(t)$.
c) Napište rovnici pro zrychlení $\boldsymbol{a}(t)$.
d) Vyjádřete závislost velikosti rychlosti na čase $v(t)$.
e) Vyjádřete závislost velikosti zrychlení na čase $a(t)$.
f) Určete maximální velikost a_max a minimální velikost a_min zrychlení během pohybu.

Úloha 3.7*: Ojnici pístu spalovacího motoru lze modelovat úsečkou délky l, jejíž koncový bod A se pohybuje po kružnici o poloměru $r < l$ a druhý koncový bod B po ose x s počátkem ve středu S této kružnice. Pohyb bodu A považujte za rovnoměrný s konstantní úhlovou rychlostí ω. V nulovém čase leží bod A na ose x mezi body S, B. Najděte funkce vyjadřující závislosti souřadnice x polohy a souřadnice v_x okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ bodu B na čase t.

4 Tečné a normálové zrychlení

Nejprve si připomeneme rovnoměrný pohyb po kružnici a odvodíme vztah pro jeho dostředivé zrychlení.

U rovnoměrného pohybu po kružnici zůstává velikost okamžité rychlosti konstantní, avšak směr vektoru rychlosti se neustále mění, a to rovnoměrně.



Předpokládejme, že během velmi malého časového intervalu Δt se hmotný bod posune po kruhovém oblouku velmi malé délky Δs z bodu A do bodu A', přičemž jeho průvodič opíše velmi malý úhel $\Delta\varphi$. Vektor $\boldsymbol{v}$ tak přejde na vektor $\boldsymbol{v}'$, přičemž $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}'|$.

Přenesme vektor $\boldsymbol{v}$ tak, aby oba vektory $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ měly společný počáteční bod. Orientovaná spojnice koncových bodů vektorů $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$, tedy vektor

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v},$$

pak udává změnu vektoru rychlosti. Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$ tvoří základnu rovnoramenného trojúhelníka $A'BC$, svírá proto se svými rameny úhel $90° - \dfrac{\Delta\varphi}{2}$. Po přenesení vektoru $\Delta\boldsymbol{v}$ do bodu A svírá s úsečkou AS úhel $\dfrac{\Delta\varphi}{2}$.

Budeme-li uvažovat namísto velmi malého časového intervalu Δt nekonečně malý interval $\mathrm{d}t$, čímž velmi malé změny Δs, $\Delta\varphi$, $\Delta\boldsymbol{v}$ přejdou na nekonečně malé změny $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$, má vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ od úsečky AS nekonečně malou odchylku $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{2}$, čímž limitně směřuje do středu S. Podíl $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}$ pak určuje vektor nazývaný **dostředivé zrychlení**. Velikost dostředivého zrychlení je $a_\mathrm{d} = \dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}$, kde $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}| = v \cdot \mathrm{d}\varphi$.[2] Po dosazení máme $a_\mathrm{d} = \dfrac{v \cdot \mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ a s uvážením $v = r\omega$ pak je

$$a_\mathrm{d} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}\,.$$

Dostředivé zrychlení rovnoměrného pohybu po kružnici lze též odvodit derivováním polohového vektoru

[2] U křivočarých pohybů nutno rozlišovat velikost změny vektoru rychlosti $|\mathrm{d}\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}|$ a změnu velikosti rychlosti $\mathrm{d}v = v' - v$, která je u rovnoměrného pohybu po kružnici nulová.

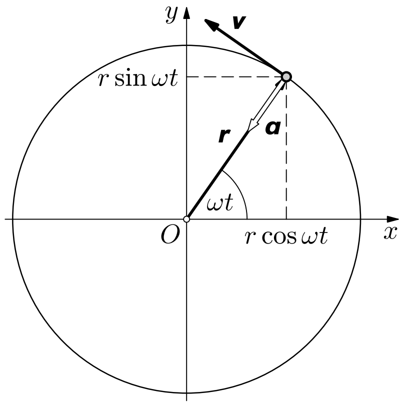
$$\boldsymbol{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)\,,$$

zvolíme-li počátek soustavy souřadnic ve středu kružnice. Postupně dostaneme:

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)\,,$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right) =$$

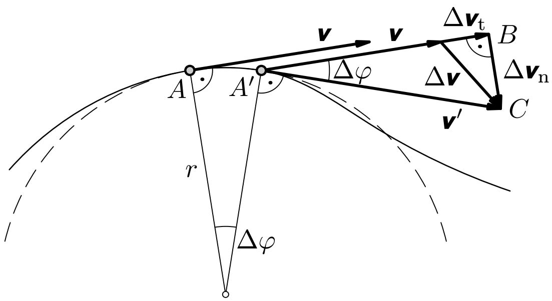
$$= (-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t) = -\omega^2\boldsymbol{r}\,.$$



Z výsledku je zřejmé, že zrychlení hmotného bodu při rovnoměrném pohybu po kružnici má opačný směr než polohový vektor $\boldsymbol{r}$, míří tedy do středu trajektorie, a jeho velikost je $a = r\omega^2$.

Nyní se zaměříme na obecný **křivočarý nerovnoměrný pohyb**. Předpokládejme, že se hmotný bod pohybuje po křivce nerovnoměrným pohybem. V každém bodě trajektorie můžeme velmi malý úsek křivky přibližně nahradit obloukem kružnice o jistém poloměru. Zmenšováním délky tohoto úseku křivky nahrazuje kruhový oblouk úsek křivky přesněji. V limitním případě, tj. v případě nekonečně malé délky úseku křivky, existuje právě jedna kružnice, jejíž oblouk nekonečně malé délky kopíruje přesně zakřivení trajektorie v daném bodě A. Tato kružnice se nazývá **oskulační kružnice**.

Předpokládejme, že v bodě A má hmotný bod rychlost $\boldsymbol{v}$, v bodě A', kam dorazí o velmi malý časový interval Δt později, má rychlost $\boldsymbol{v}'$. Vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{v}'$ svírají úhel $\Delta\varphi$. Vektor $\boldsymbol{v}$ přeneseme tak, aby jeho počáteční bod splýval s počátečním bodem vektoru $\boldsymbol{v}'$. Vektor $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$ pak určuje změnu vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ během časového intervalu Δt.

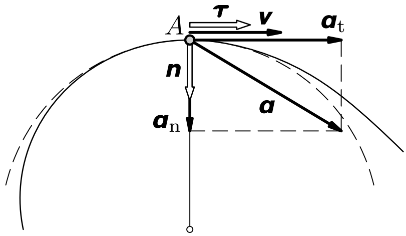


Vektor $\Delta\boldsymbol{v}$ lze rozložit na dva navzájem kolmé vektory, na tečný vektor $\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$, který určuje změnu Δv velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}$, a na normálový vektor $\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}$, který určuje změnu $\Delta\varphi$ směru rychlosti $\boldsymbol{v}$.

Z trojúhelníku $A'BC$ plyne $\cos\Delta\varphi = \dfrac{|\boldsymbol{v} + \Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{t}|}{v'}$. U zrychleného pohybu mají vektory $\boldsymbol{v}$ a $\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ stejný směr, u zpomaleného vzájemně opačný. Proto je možné rovnici upravit na tvar $\Delta v_\mathrm{t} = v'\cos\Delta\varphi - v$. Pro zrychlený pohyb je $\Delta v_\mathrm{t} > 0$, pro zpomalený $\Delta v_\mathrm{t} < 0$. Po vydělení dobou Δt dostaneme $\dfrac{\Delta v_\mathrm{t}}{\Delta t} = \dfrac{v'\cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}$. Blíží-li se Δt k nule, blíží se $\cos\Delta\varphi$ k jedné a čitatel $v' - v$ se blíží k $\mathrm{d}v$, čímž dostáváme **tečné zrychlení** $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ o velikosti

$$|\boldsymbol{a}_\mathrm{t}| = \frac{|v' - v|}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right| .$$

Samotné a_t představuje *souřadnici* tečného zrychlení měřenou v tečně (pro zrychlený pohyb je $a_\mathrm{t} > 0$, pro zpomalený $a_\mathrm{t} < 0$). Tečné zrychlení jako vektor lze zapsat $\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = a_\mathrm{t}\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v}$ je jednotkový vektor ve směru okamžité rychlosti.



Z trojúhelníku $A'BC$ dále plyne $\sin\Delta\varphi = \dfrac{|\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{v'}$, z čehož dostaneme $\dfrac{|\Delta\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\Delta t} = \dfrac{v'\sin\Delta\varphi}{\Delta t}$. Pro Δt blížící se k nule lze psát $\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v'\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, neboť pro nekonečně malý úhel je $\sin\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\varphi$. Dále je $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{v\mathrm{d}t}{r}$, kde $v\mathrm{d}t$ je nekonečně malý přírůstek dráhy. Po dosazení dostaneme $\dfrac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v'v}{r}$. Vzhledem k rovnosti $v' = v$ pro nekonečně malý časový interval máme hledané **normálové zrychlení** $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ o velikosti

$$a_\mathrm{n} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}|}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{r} .$$

Normálové zrychlení jako vektor lze analogicky zapsat $\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = a_\mathrm{n}\boldsymbol{n}$, kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor směřující od bodu A do středu oskulační kružnice.

Složením tečného a normálového zrychlení dostaneme celkové zrychlení, které můžeme též zapsat jako derivaci vektoru rychlosti:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{t} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} .$$

Normálové zrychlení má směr do středu oskulační kružnice, tečné zrychlení má v případě zrychleného pohybu směr okamžité rychlosti, v případě zpomaleného pohybu směr opačný. Na obrázku je směr vektorů okamžité rychlosti a tečného zrychlení shodný, znázorněný pohyb je v daném okamžiku zrychlený. Vzhledem ke kolmosti tečného a normálového vektoru platí pro velikost zrychlení

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}\,.$$

Speciálně pro přímočarý nerovnoměrný pohyb, kdy v libovolném bodě trajektorie je nulové zakřivení, tedy $r \to \infty$, a zrychlení má pouze tečnou složku, platí $a = |a_\mathrm{t}| = \left|\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|$.

Naopak speciálně pro rovnoměrný křivočarý pohyb, kdy časová změna velikosti rychlosti v libovolném bodě trajektorie je nulová, tedy $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, a zrychlení má pouze složku normálovou (dostředivou), platí $a = a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r}$. Poloměr zakřivení trajektorie se během pohybu může měnit.

Příklad 4.1: Vůz F1 o celkové hmotnosti $m = 600$ kg se pohybuje s účinným výkonem motoru (s výkonem spotřebovávaným pouze na zrychlování vozu) $P = 200$ kW zatáčkou tvaru kruhového oblouku o poloměru $r = 100$ m ve vodorovné rovině okamžitou rychlostí o velikosti $v = 150\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

a) Určete velikosti tečného, normálového a celkového zrychlení.
b) Určete přetížení pilota, tj. poměr velikostí výsledné síly působící na pilota a jeho tíhové síly.

Řešení:

a) Pro výkon platí $P = Fv = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot v$, z čehož určíme tečné zrychlení

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{mv} = 8{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Normálové zrychlení je $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r} = 17{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Celkové zrychlení je $a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = 19{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) Ve vztažné soustavě spojené s automobilem působí na pilota o hmotnosti m_1 ve vodorovné rovině setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}$ a kolmo k ní tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$. Jejich výslednice má velikost $F = \sqrt{F_\mathrm{s}^2 + F_G^2}$. Hledaný poměr je

$$\frac{F}{F_{\mathrm{G}}} = \frac{\sqrt{F_{\mathrm{s}}^2 + F_G^2}}{F_G} = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{g} = 2{,}2\,.$$

Příklad 4.2: Hmotný bod je vržen pod elevačním úhlem α_0 rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ tak, že koná šikmý vrh. Určete závislosti

a) okamžité rychlosti na čase,
b) a_{t} a a_{n} na čase.

Řešení:

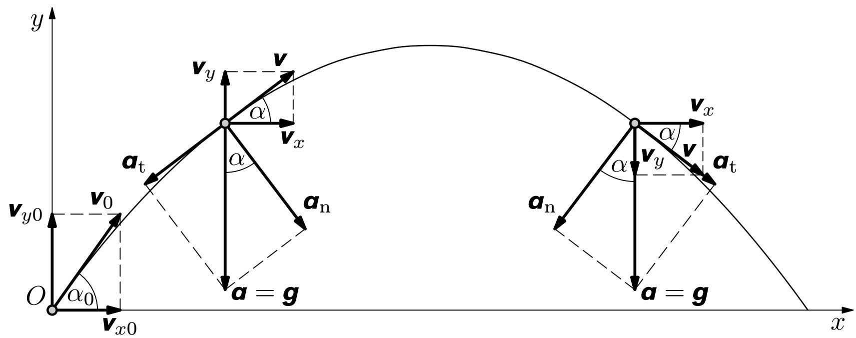
a) Z obrázku pro souřadnice okamžité rychlosti plyne

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0\,, \qquad v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt\,.$$

Velikost okamžité rychlosti pak je

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}\,.$$

b) Každý vektor lze rozložit do dvou různých směrů. Z hlediska vlastní příčiny je vhodné (a navíc jednoduché) rozložit vektor okamžitého zrychlení do směrů souřadnicových os (př. 3.2): $a_x = 0$, $a_y = -g$. Okamžité zrychlení lze však také rozložit do směru tečného a kolmého k trajektorii. Fyzikální význam těchto složek je okamžitá časová změna velikosti rychlosti a okamžitá časová změna směru rychlosti.



Souřadnici a_{t} tečného zrychlení určíme ze vztahu

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2} = \frac{g(gt - v_0 \sin \alpha_0)}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha_0 + g^2 t^2}}\,.$$

Uvážíme-li, že závorka v čitateli vyjadřuje souřadnici rychlosti $-v_y$ a jmenovatel velikost rychlosti v, lze psát $a_{\mathrm{t}} = -g\dfrac{v_y}{v}$. V době výstupu je $v_y > 0$,

$a_{\mathrm{t}} < 0$. Tečné zrychlení má opačný směr než vektor okamžité rychlosti, pohyb je zpomalený. V době sestupu je tomu naopak.

Pro velikost normálového zrychlení nelze použít vztah $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{r}$, neboť neznáme poloměr oskulační kružnice v jednotlivých bodech trajektorie. Známe však celkové zrychlení pohybu $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, z čehož $a_{\mathrm{n}} = \sqrt{g^2 - a_{\mathrm{t}}^2}$. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{g v_0 \cos\alpha_0}{\sqrt{v_0^2 - 2 v_0 g t \sin\alpha_0 + g^2 t^2}}\,.$$

Výraz možno též zjednodušit na tvar $a_{\mathrm{n}} = g\dfrac{v_x}{v}$. Vzhledem ke konstantní souřadnici v_x je normálové zrychlení nepřímo úměrné velikosti okamžité rychlosti.

Z rovnosti $a_{\mathrm{n}} = \dfrac{v^2}{r} = g\dfrac{v_x}{v}$ lze určit závislost poloměru křivosti trajektorie na rychlosti

$$r = \frac{v^3}{g v_x} = \frac{v^3}{g v_0 \cos\alpha_0}\,.$$

Vzorce $a_{\mathrm{t}} = -g\dfrac{v_y}{v}$, $a_{\mathrm{n}} = g\dfrac{v_x}{v}$ lze snadno ověřit bez použití derivace. Pro úhel α, který svírá vektor okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ s osou x, totiž platí:

$$\sin\alpha = \frac{v_y}{v} = -\frac{a_{\mathrm{t}}}{g}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_{\mathrm{n}}}{g}\,.$$

Příklad 4.3: Rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu po kružnici je popsán parametrickými rovnicemi

$$x = r\cos\frac{1}{2}\varepsilon t^2\,, \qquad y = r\sin\frac{1}{2}\varepsilon t^2\,,$$

kde r je poloměr kružnice a ε stálé úhlové zrychlení. Odvoďte závislost tečného, normálového a celkového zrychlení na čase.

Řešení: Souřadnice rychlosti ve směrech x a y jsou

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -r\varepsilon t \sin\frac{1}{2}\varepsilon t^2\,, \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = r\varepsilon t\cos\frac{1}{2}\varepsilon t^2\,.$$

Pro velikost okamžité rychlosti platí

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(-r\varepsilon t\sin\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)^2 + \left(r\varepsilon t\cos\frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)^2} = r\varepsilon t\,.$$

Tečné zrychlení a_{t} vyjadřuje okamžitou časovou změnu velikosti rychlosti a u rovnoměrně zrychleného pohybu je konstantou úměrnosti ve vztahu $v = a_{\mathrm{t}} t$. Porovnáním s předchozí rovnicí dostáváme $a_{\mathrm{t}} = r\varepsilon$.

Souřadnice zrychlení ve směrech x a y jsou

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -r\varepsilon \sin \frac{1}{2}\varepsilon t^2 - r\varepsilon^2 t^2 \cos \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \,,$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = r\varepsilon \cos \frac{1}{2}\varepsilon t^2 - r\varepsilon^2 t^2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \,.$$

Pro velikost celkového zrychlení platí

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-r\varepsilon \sin \frac{1}{2}\varepsilon t^2 - r\varepsilon^2 t^2 \cos \frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)^2 + \left(r\varepsilon \cos \frac{1}{2}\varepsilon t^2 - r\varepsilon^2 t^2 \sin \frac{1}{2}\varepsilon t^2\right)^2} \,.$$

Po umocnění dvojčlenů a po úpravě dostáváme $a = \sqrt{r^2\varepsilon^2 + r^2\varepsilon^4 t^4}$. Porovnáním se vzorcem $a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2}$ dostáváme, že tečné zrychlení $a_\mathrm{t} = r\varepsilon$ je konstantní a normálové zrychlení $a_\mathrm{n} = r\varepsilon^2 t^2$ roste s časem kvadraticky. Normálové zrychlení lze též získat dosazením $v = r\varepsilon t$ do vztahu $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r}$.

Úloha 4.1: Centrifuga s kosmonautem o celkové hmotnosti m se ve vodorovné rovině roztáčí se stálým výkonem P. Poloměr kružnicové trajektorie kosmonauta je r. Určete závislost veličin a, a_t, a_n na čase. Kabinu s kosmonautem považujte za hmotný bod, hmotnost ramene zanedbejte.

5 Druhý Newtonův pohybový zákon

Pohybovým účinkem síly je časová změna hybnosti tělesa, přičemž se v průběhu času může měnit nejen rychlost tělesa, ale i jeho hmotnost. Pro jednoduchost se omezíme na klasickou fyziku a zanedbáme relativistickou změnu hmotnosti. Hmotnost tělesa se bude měnit zachycováním, uvolňováním nebo vymršťováním hmoty.

Působí-li na těleso stálá síla, je vektor této síly $\boldsymbol{F}$ určen poměrem změny vektoru hybnosti $\Delta\boldsymbol{p}$ a doby Δt, během něhož k této změně hybnosti došlo:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}\,.$$

Vektor hybnosti se přitom mění rovnoměrně.

Není-li síla působící na těleso stálá, udává vzorec průměrnou sílu působící na těleso v časovém intervalu Δt. Okamžitou sílu vyjádříme podílem nekonečně malé změny hybnosti a nekonečně malého časového intervalu této změně odpovídajícímu, tedy derivací hybnosti podle času:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\,,$$

neboli podle 3. kap. ve složkách $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}\dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{j}\dfrac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{k}\dfrac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t}$.

Jelikož $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, přičemž obecně rychlost i hmotnost mohou být funkcemi času, podle pravidla (P3) pro derivaci součinu funkcí platí:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,. \tag{5.1}$$

Okamžitou sílu tak tvoří součet dvou členů. První z nich vyjadřuje změnu hybnosti tělesa vlivem změny jeho okamžité rychlosti. Druhý vyjadřuje změnu hybnosti tělesa vlivem změny jeho hmotnosti.

V rovnici (5.1) mohou nastat speciální případy:

a) Nemění-li se během pohybu hmotnost tělesa, tj. $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, platí známý a běžný vztah $\boldsymbol{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}$. Okamžitá síla je přímo úměrná okamžitému zrychlení.

b) Nemění-li se během pohybu rychlost tělesa, tj. $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$, platí $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Okamžitá síla je přímo úměrná časové změně hmotnosti.

c) Působí-li síla ve směru pohybu tělesa, je pohyb přímočarý a rovnici (5.1) můžeme psát ve skalárním tvaru

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,.$$

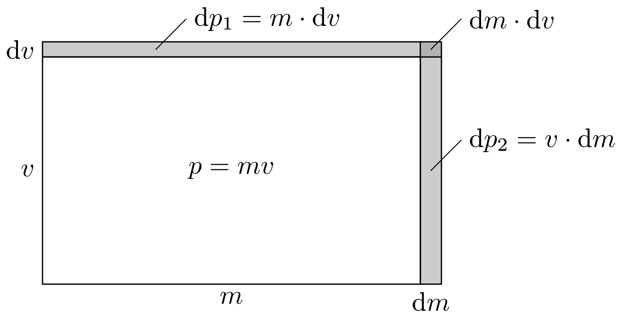
Úpravou rovnice (5.1) dostaneme diferenciál impulzu

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\mathrm{d}m\,.$$

Znázorníme situaci pro přímočarý zrychlený pohyb při rostoucí hmotnosti tělesa. (Těleso při pohybu postupně zachycuje klidnou hmotu.) Tehdy rychlost $\boldsymbol{v}$ a přírůstek rychlosti d$\boldsymbol{v}$ mají shodný směr a pro velikost diferenciálu impulzu platí

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{p}| = \mathrm{d}p = F\mathrm{d}t = m\mathrm{d}v + v\mathrm{d}m\,.$$

Obsah obdélníka o stranách m a v udává velikost hybnosti p tělesa v čase t, obsah obdélníka o stranách $m+\mathrm{d}m$ a $v+\mathrm{d}v$ pak velikost hybnosti tělesa v čase $t+\mathrm{d}t$. Rozdíl obsahů představuje elementární přírůstek velikosti hybnosti dp tělesa neboli velikost elementárního impulzu síly $F\mathrm{d}t$. Obsah proužku o stranách m a dv představuje velikost přírůstku hybnosti $\mathrm{d}p_1 = m \cdot \mathrm{d}v$ tělesa vlivem změny velikosti jeho okamžité rychlosti při dané hmotnosti, obsah proužku o stranách v a dm pak znázorňuje velikost přírůstku hybnosti $\mathrm{d}p_2 = v \cdot \mathrm{d}m$ tělesa vlivem změny jeho hmotnosti při dané okamžité rychlosti. „Obdélníček“ o stranách dm a dv je vzhledem k obsahu proužků zanedbatelný.



Příklad 5.1: Stanovte velikost síly působící na těleso při jeho přímočarém pohybu za podmínek:

a) $m = konst, \quad v = konst,$
b) $m = konst, \quad v(t) = at, \quad \text{kde} \quad a = konst,$
c) $m(t) = m_0 + \dfrac{m_1 - m_0}{t_1}t, \quad v = konst, \quad \text{kde} \quad m_1 > m_0,$
d) $m(t) = m_0 + \dfrac{m_1 - m_0}{t_1}t, \quad v(t) = at, \quad \text{kde} \quad m_1 > m_0, \quad a = konst.$

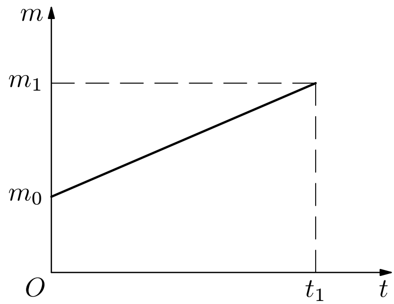
Řešení:
Pohyb je přímočarý, můžeme proto ve všech případech psát $F = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$.

a) Platí $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = 0$, tedy těleso s konstantní hmotností se pohybuje rovnoměrně bez působení vnější síly, tj. setrvačností.

b) Těleso s konstantní hmotností koná rovnoměrně zrychlený pohyb, pro velikost síly platí

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv(t)) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(at) = ma = konst\,.$$

c) Při stálé rychlosti v hmotnost m lineárně roste. Závislost odpovídá rovnoměrnému „nabalování“ klidné hmoty při stálé rychlosti tělesa, např. při průjezdu vagonu pod násypkou, z níž rovnoměrně svisle dolů padá sypký materiál. Derivováním dostaneme



$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0 + \frac{m_1 - m_0}{t_1}t\right) = \\ = \frac{m_1 - m_0}{t_1} = konst.$$

K udržení rychlosti vagonu, a tedy k uvádění rovnoměrně padající hmoty do pohybu, je nutná konstantní síla.

d) Situace je obdobou případu c), rychlost tělesa však rovnoměrně roste. Pro okamžitou sílu platí

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(m_0 + \frac{m_1 - m_0}{t_1}t\right)at\right] = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_0 at + \frac{m_1 - m_0}{t_1}at^2\right) = m_0 a + 2a\frac{m_1 - m_0}{t_1}t\,,$$

je tedy lineární funkcí času.

Příklad 5.2: Lokomotiva táhne vagon o hmotnosti $m_0 = 20$ t pod násypkou, z níž padá svisle dolů štěrk s hmotnostním tokem $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 600\ \mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Určete závislost na čase síly, kterou působí lokomotiva na vagon, jestliže se pohybuje

a) rovnoměrně stálou rychlostí $v_0 = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,

b) rovnoměrně zrychleně se zrychlením $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

Jedná se o přímočarý pohyb, pro sílu ve směru pohybu platí zákon síly ve skalárním tvaru

$$F = m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t)\frac{dm}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde rychlost i hmotnost jsou obecně funkcí času. V našem případě hmotnost vagonu s nákladem závisí na čase podle vzorce $m = m_0 + \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t$.

a) Při rovnoměrném pohybu je $v = v_0 = konst$, tedy $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$. Pro sílu platí

$$F = v(t)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0{,}5 \cdot 600\ \mathrm{N} = 300\ \mathrm{N}\,.$$

Touto konstantní silou je urychlován bezprostředně po svém dopadu pouze přibývající náklad, poté se pohybuje s vagonem konstantní rychlostí.

b) Při rovnoměrně zrychleném pohybu je $v = at$, tedy $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$. Pro sílu platí

$$F = m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \left(m_0 + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}t\right)a + at\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} =$$
$$= m_0a + 2at\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4000\ \mathrm{N} + t \cdot 240\ \mathrm{N \cdot s^{-1}}\,.$$

Touto lineárně rostoucí silou je urychlován vagon s dosud dopadnutým štěrkem s daným zrychlením a uváděn do pohybu právě dopadají štěrk na okamžitou rychlost vagonu.

Příklad 5.3: Těleso se pohybuje tak, že jeho rychlost roste podle rovnice $v(t) = Bt^2$ a jeho hmotnost lineárně klesá podle vztahu $m = m_0 - At$, přičemž hmota se bez silového působení uvolňuje až do zániku tělesa.

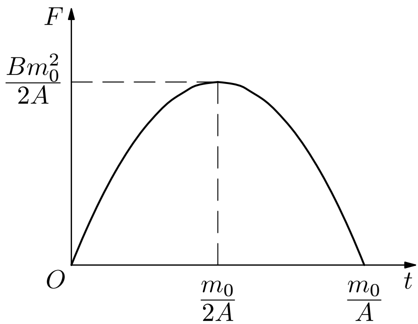
a) Sestrojte graf závislosti velikosti pohybové síly na čase.
b) Určete velikost rychlosti a velikost zrychlení pohybu v okamžiku zániku tělesa. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_0 = 10$ kg, $A = 1\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$, $B = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-3}}$.

Řešení:

a) Jelikož uvolňující se hmota tělesa není do žádného směru „odhazována“, člen $v\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ se neuplatňuje. Síla je nutná pouze na požadované urychlování „ubývajícího“ tělesa. Pro hledanou pohybovou sílu platí

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (m_0 - At)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bt^2) =$$
$$= 2Bm_0t - 2ABt^2\,.$$

Grafem je parabola.



b) Dosazením $t = \dfrac{m_0}{A} = 10$ s dostaneme $vBt^2 = B\dfrac{m_0^2}{A^2} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Zrychlení v témže čase je $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2Bt = 2B\dfrac{m_0}{A} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Úloha 5.1: Na vodorovný dopravníkový pás s jmenovitým přepravním výkonem 800 kg · min^{-1} a rychlostí posuvu pásu 3 m · s^{-1} dopadá ve svislém směru sypký materiál. Určete velikost síly, která při plném výkonu působí na dopravník ve vodorovném směru vlivem dopravy materiálu.

Úloha 5.2: Lokomotiva táhne po vodorovných kolejích ve směru osy x cisternu, z níž vytéká voda se stálým hmotnostním tokem 15 kg · s^{-1} výtokovou rychlostí o velikosti 6 m · s^{-1}. Pohyb cisterny je

1) rovnoměrný,
2) rovnoměrně zrychlený se zrychlením 0,4 m · s^{-2}.

Voda z cisterny vytéká

a) svisle dolů,
b) ve směru jízdy,
c) proti směru jízdy.

Určete pro všechny kombinace závislost složky okamžité síly $\boldsymbol{F}_x$, kterou působí lokomotiva na cisternu, na čase. V daném okamžiku je hmotnost cisterny 60 t. Výtokovou rychlost považujte za nezávislou na zrychlení cisterny.

Úloha 5.3: Vlak o hmotnosti 400 t se pohybuje po vodorovných kolejích v dešti se zrychlením 0,1 m · s^{-2}. Za každou sekundu dopadne na povrch vlaku 60 kg vody. Předpokládáme, že dešťová voda je urychlována na rychlost vlaku a poté stéká na zem. Určete velikost tahové síly motoru lokomotivy při okamžité rychlosti 90 km · h^{-1}.

Úloha 5.4: Kropicí vůz se rozjíždí se stálým zrychlením 0,5 m · s^{-2} při současném kropení ve směru jízdy výtokovou rychlostí 20 m · s^{-1} se stálým průtokem 4 kg · s^{-1}. Počáteční hmotnost vozu je 8 000 kg. Určete závislost velikosti síly, kterou se vůz rozjíždí, na čase.

Úloha 5.5: Vlak o počáteční hmotnosti m_0 se v dešti rozjíždí z klidu se stálým zrychlením $\boldsymbol{a}$. Dešťová voda padá na vlak rovnoměrně s vydatností $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = k$ a v otevřených vagonech zůstává. Určete závislost síly motorů lokomotivy na čase.

6 Zákon zachování hybnosti

Při vzájemném působení dvou těles je podle 3. Newtonova pohybového zákona splněno

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2\,,$$

kde $\boldsymbol{F}_1$ je síla, kterou působí druhé těleso na první a $\boldsymbol{F}_2$ je síla, kterou působí první těleso na druhé. Tyto síly, akce a reakce, mají tedy stejnou velikost, navzájem opačný směr. Vznik a zánik jedné síly je vždy spojen se vznikem a zánikem síly druhé. Mají-li síly pohybový účinek, způsobí každá z nich během doby $\mathrm{d}t$ změnu hybnosti tělesa, na které působí:

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \boldsymbol{F}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}$$

Dosazením do vztahu (6.1) pak dostaneme: $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t}$,
z čehož plyne

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 = -\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2\,, \quad \text{neboli} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 + \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}\,.$$

Tyto rovnice představují zákon zachování hybnosti v diferenciálním tvaru pro dvě tělesa: Změny hybnosti při vzájemném silovém působení dvou těles jsou stejně velké, ale opačného směru. Jinými slovy: Celková hybnost izolované soustavy dvou těles zůstává konstantní.

Tento závěr je možné rozšířit na izolovanou soustavu libovolného počtu těles. Pak platí:

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = konst\,.$$

Uvedená rovnice vyjadřuje zákon zachování hybnosti: Součet hybností těles izolované soustavy je konstantní.

Příklad 6.1: Odvoďte vztah pro okamžité zrychlení rakety
a) ve volném kosmickém prostoru,
b) v gravitačním poli.

Řešení:

a) Označme $\boldsymbol{v}$ okamžitou rychlost rakety ve volném kosmickém prostoru, $\boldsymbol{u}$ okamžitou rychlost tryskajících plynů vzhledem k raketě, m okamžitou hmotnost rakety, $\mathrm{d}m$ $(\mathrm{d}m < 0)$ změnu hmotnosti rakety za dobu $\mathrm{d}t$. Pak $-\mathrm{d}m$ vyjadřuje hmotnost vytrysknutých plynů za tutéž dobu $\mathrm{d}t$. Plyny získají vzhledem k raketě okamžitou hybnost $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m$, a to vlivem síly

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,,$$

kterou na ně raketa působí. Současně vzroste hybnost rakety o $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$. Příčinou je síla,

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,.$$

kterou působí naopak plyny na raketu. Dosazením do 3. Newtonova pohybového zákona $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$ dostaneme:

$$\frac{\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Podíl $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ určuje hledané okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ rakety, které z rovnice vyjádříme:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{u}}{m(t)}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.1}$$

Okamžité zrychlení rakety tak závisí na její okamžité hmotnosti m, na rychlosti $\boldsymbol{u}$ tryskajících plynů vzhledem k raketě a na časové změně hmotnosti rakety $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Jelikož ve vektorové rovnici je $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} < 0$, mají vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{u}$ navzájem opačný směr. Kladná veličina $Q = -\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ představuje hmotnostní tok plynů.

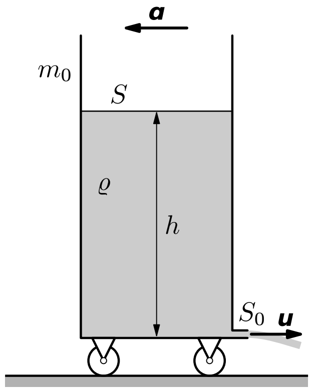
b) V gravitačním poli s gravitačním zrychlením $\boldsymbol{a}_g$ již soustava není izolovaná, neboť je pod vlivem gravitační síly $\boldsymbol{F}_g = m\boldsymbol{a}_g$, která obecně závisí na poloze rakety, a tedy při jejím pohybu i na čase. Ke zrychlení rakety vlivem vlastního pohonu vektorově přičteme zrychlení gravitačního pole, tj.

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\boldsymbol{u}}{m(t)}\,\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}_g(t)\,.$$

Příklad 6.2: Na obrázku je model reaktivního pohonu. Vozík o hmotnosti $m_0 = 2$ kg tvoří nádoba o obsahu vnitřního průřezu $S = 1\ \mathrm{dm}^2$ postavená na podvozku. U dna nádoby se nachází výtokový otvor o obsahu vnitřního průřezu $S_0 = 1\ \mathrm{cm}^2$. Nádobu naplníme kapalinou hustoty $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Určete velikost zrychlení vozíku při okamžité výšce hladiny $h = 25$ cm nad výtokovým otvorem. Vliv setrvačných sil působících na kapalinu na stav hladiny a na tlak ve výtokovém otvoru zanedbejte.

Řešení:

Výtokovým otvorem proteče za čas dt kapalina o hmotnosti $|\mathrm{d}m| = \varrho S_0 \mathrm{d}x$, kde d$x$ je posunutí kapaliny ve výtokové trubici za čas dt. Hmotnostní tok vytékající kapaliny pak je



$$\frac{|\mathrm{d}m|}{\mathrm{d}t} = \frac{\varrho S_0 \mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varrho S_0 u\,.$$

Výtoková rychlost kapaliny má velikost

$$u = \sqrt{2gh}.$$

Okamžitá hmotnost vozíku je

$$m = m_0 + \varrho S h.$$

Podle rovnice (6.1) je velikost zrychlení tělesa $a = \dfrac{u}{m}\dfrac{|\mathrm{d}m|}{\mathrm{d}t}$.

Dosazením veličin $\dfrac{|\mathrm{d}m|}{\mathrm{d}t}$, u, m nakonec dostaneme

$$a = \frac{2g\varrho S_0 h}{m_0 + \varrho S g} = 0{,}11\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Úloha 6.1: Startovní hmotnost rakety Saturn 5 s kosmickou lodí Apollo 11, která v roce 1969 přistála na Měsíci, byla 2940 t. Výtoková rychlost plynů byla $3\,010\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

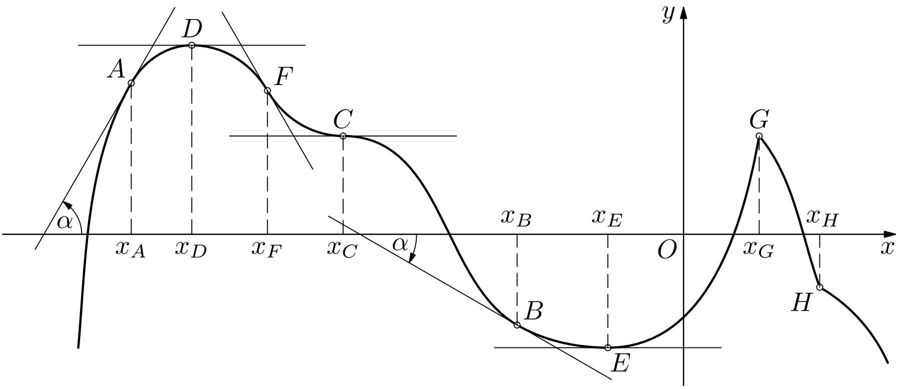
a) Určete hmotnostní tok plynů v okamžiku, kdy se raketa odpoutává od rampy.

b) Určete velikost okamžitého zrychlení rakety při pohybu svisle vzhůru v časech $t_0 = 0$ a $t_1 = 100$ s za předpokladu $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 12\ \mathrm{t \cdot s^{-1}}$. Odpor vzduchu zanedbejte. Gravitační zrychlení považujte v obou časech za stejné s hodnotou $a_g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

7 Extrémy funkce

Ve fyzikálních úlohách nás často zajímá, jak se funkční hodnota fyzikální veličiny v závislosti na jiné veličině mění, zda roste nebo klesá a kde a jakou má extrémní hodnotu, tedy maximum nebo minimum. Intuitivně si ukážeme souvislost těchto vlastností funkce s derivacemi a metody, jak s využitím derivace extrémy funkce najít.

Předpokládejme, že danou funkci $y = f(x)$ definovanou na určitém intervalu lze zobrazit spojitou, tj. v žádném bodě nepřerušenou, křivkou. Každá taková funkce se nazývá **spojitá funkce**. Existuje-li v daném bodě $[x_0, f(x_0)]$ křivky tečna, je její směrnice $\operatorname{tg}\alpha$ dána hodnotou derivace v bodě x_0, tj. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, kde α je směrový úhel příslušné tečny $(-90° \le \alpha \le 90°)$.



Tečna ke grafu sestrojená v bodě A křivky svírá s osou x kladný úhel α $(0 < \alpha < 90°)$, neboli směrnice tečny $\operatorname{tg}\alpha$ a derivace $f'(x_A)$ v bodě x_A je kladná. Říkáme, že v bodě x_A je funkce **rostoucí**.

Naopak v bodě B je úhel α záporný $(-90° < \alpha < 0)$, tudíž směrnice $\operatorname{tg}\alpha$ a derivace $f'(x_B)$ je záporná. Říkáme, že v bodě x_B je funkce **klesající**.

Je-li funkce rostoucí, resp. klesající v každém bodě daného intervalu, říkáme, že je rostoucí, resp. kleasjící na tomto intervalu. Je-li funkce na daném intervalu rostoucí, nebo je-li na daném intervalu klesající, pak říkáme, že funkce je na tomto intervalu **monotónní**.

V bodě x_D funkce přechází z rostoucí na klesající, v bodě x_E z klesající na rostoucí. Říkáme, že v bodech x_D a x_E má funkce **lokální extrémy**, a sice v bodě x_D **lokální maximum** a v bodě x_E **lokální minimum**. V obou případech je derivace funkce, a tedy směrnice tečny, nulová: $f'(x_D) = \operatorname{tg}\alpha_D =$

$= f'(x_E) = \operatorname{tg} \alpha_E = 0$. Tečny sestrojené ke grafu v bodech D a E mají směr totožný s osou x.

V bodě x_C je derivace funkce též nulová jako v bodech x_D a x_E, ale funkce je klesající. Tečna v odpovídajícím bodě C křivky graf protíná a křivka mění zakřivení na opačné. Také v bodě F tečna křivku protíná, přestože zde derivace nulová není.

Bod C i bod F grafu nazýváme **inflexní bod**. Říkáme též, že v bodech x_C a x_F nastala **inflexe**.

V bodech G a H má graf funkce „špičku“, její derivace v bodech x_G a x_H neexistuje a nelze jednoznačně sestrojit tečnu. V bodě x_G přechází funkce z rostoucí na klesající, má v tomto bodě lokální maximum. V bodě x_H je funkce klesající.

Z ukázky je částečně vidět a z matematické analýzy plyne, **že extrémy spojité funkce definované na libovolném intervalu** najdeme mezi následujícími „podezřelými“ body:

a) **Krajní body uvažovaného intervalu.** Je-li interval otevřený, krajní bod neexistuje a tudíž žádný extrém zde nepřichází v úvahu. Příkladem může být funkce tangens v bodě $x = \pi/2$. Je-li interval uzavřený, tvoří krajní body lokální extrémy. Např. funkce x^2 má na intervalu $\langle -2, 3)$ v bodě $x = -2$ lokální maximum, v bodě $x = 3$ však extrém nemá, neboť číslo 3 do intervalu nepatří.

b) **Body, v nichž derivace neexistuje.** Jsou to případy, kdy má graf funkce „špičku“ a nelze sestrojit tečnu. Jde o případy funkcí s absolutní hodnotou nebo na sebe navazující dvě různé funkce, např. rostoucí lineární funkce navazující na klesající hyperbolu nepřímé úměrnosti.

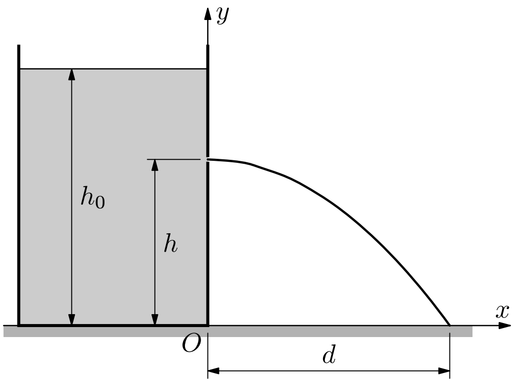
c) **Body, v nichž je derivace nulová.** Funkci zderivujeme ještě jednou. Je-li v uvažovaném bodě druhá derivace kladná, resp. záporná, má v tomto bodě funkce lokální minimum, resp. maximum. Je-li v tomto bodě druhá derivace rovněž nulová jako první derivace, budeme derivovat dál, dokud nenarazíme na první nenulovou derivaci. Při sudém pořadí první nenulové derivace nastává lokální extrém, a sice maximum (je-li tato derivace záporná) nebo minimum (je-li kladná), a při lichém pořadí nastává inflexe. (Toto pravidlo je možné demonstrovat na mocninných funkcích x^2, x^3, x^4 atd., tedy obecně x^n. Funkce x^n má v bodě $x = 0$ první nenulovou n-tou derivaci. Tedy při sudém n má funkce x^n v bodě 0 minimum, při lichém inflexi, jak je z průběhů těchto funkcí známo.)

Rozhodnutí, zda v bodě x_0 je v případě nulové první derivace lokální maximum, lokální minimum nebo inflexe, nemusíme provádět dalším derivováním funkce. Často postačí využít intuitivní představu: Je-li spojitá funkce pro $x < x_0$ rostoucí a pro $x > x_0$ klesající, pak je zřejmě v bodě x_0 maximum. Naopak, je-li pro $x < x_0$ klesající a pro $x > x_0$ rostoucí, pak je zřejmě v bodě x_0

minimum. Je-li „při přechodu zleva doprava přes bod x_0“ funkce rostoucí nebo „při přechodu zleva doprava přes bod x_0“ klesající, pak je zřejmě v bodě x_0 inflexe.

Příklad 7.1: Nádoba je naplněna kapalinou do výšky h_0 nade dnem nádoby, které je v úrovni okolní vodorovné roviny.

a) V jaké výšce h_1 nade dnem nádoby je třeba navrtat otvor, aby měla kapalina maximální dostřik?
b) Určete délku $d_{\max}$ maximálního dostřiku.



Řešení:

a) Při volbě soustavy souřadnic podle obrázku můžeme pro souřadnice libovolného bodu trajektorie vodorovného vrhu psát

$$x = vt\,, \qquad y = h - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad \text{kde} \qquad v = \sqrt{2g(h_0 - h)}$$

je výtoková rychlost kapaliny ve výšce h nade dnem nádoby. Označme t_1 dobu letu vybraného elementu kapaliny. V okamžiku dopadu platí $y = 0$, $x = d$. Z rovnice pro y-ovou souřadnici plyne

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2\,, \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Dosazením do rovnice pro x-ovou souřadnici určíme závislost délky dostřiku na výšce otvoru:

$$d(h) = vt_1 = \sqrt{2g(h_0 - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h_0 h - h^2}\,.$$

Vzhledem k monotónnosti druhé odmocniny stačí nalézt maximum výrazu pod odmocninou. Jeho derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}(h_0 h - h^2) = h_0 - 2h\,.$$

Z podmínky nulové derivace položením $h = h_1$ dostaneme hledanou výšku $h_1 = \dfrac{h_0}{2}$. Z tvaru derivace je dále zřejmé, že na uvažovaném intervalu $\langle 0, h_0\rangle$ je pro $h < h_1$ derivace kladná a tedy funkce $d(h)$ je rostoucí, pro $h > h_1$ je derivace záporná a tedy funkce $d(h)$ je klesající. Nalezený lokální extrém pro $h_1 = \dfrac{h_0}{2}$ je proto skutečně maximem této funkce.

b) Maximální délku dostřiku $d_{\max}$ získáme dosazením hodnoty $h = h_1$ do funkce $d(h)$:

$$d_{\max} = 2\sqrt{h_0 \cdot \frac{h_0}{2} - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2} = h_0\,.$$

Příklad 7.2: V homogenním tíhovém poli bylo z vodorovné roviny pod elevačním úhlem α vrženo těleso s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$.

a) Napište parametrické rovnice pohybu tělesa, které popisují závislost souřadnic x, y na čase, a z nich odvoďte rovnici trajektorie tělesa.

b) Určete souřadnice x_1, y_1 nejvyššího bodu trajektorie pomocí derivace y-ové souřadnice polohy tělesa, jednak podle času, jednak podle x-ové souřadnice.

c) Odvoďte vzorec pro délku vrhu a pomocí derivace určete elevační úhel, pro který je délka vrhu maximální.

Řešení:

a) Pro souřadnice tělesa v závislosti na čase platí

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha\,, \tag{1}$$

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2\,. \tag{2}$$

Vyloučením parametru t z rovnic (1) a (2) dostaneme

$$y(x) = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2\,. \tag{3}$$

b) Derivací funkce (2) podle t dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$ plyne $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Dosazením do rovnic (1) a (2) dostaneme souřadnice bodu s maximální výškou:

$$x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\,, \qquad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}\,.$$

Obdobně derivace funkce (3) podle x je

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}x\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}x} = 0$ plyne $x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ a dosazením do (3) pak dostaneme $y_1 = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

c) Z podmínky $y(x) = 0$ v rovnici (3) plyne

$$x\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) = 0\,.$$

Jeden kořen $x_1 = 0$ určuje počáteční bod vrhu, druhý kořen $x_2 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ místo dopadu a současně délku vrhu. Derivace délky vrhu podle elevačního úhlu je

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ plyne $\cos 2\alpha = 0$, tedy $\alpha = 45^\circ$.

Příklad 7.3: Křivka vyjadřující Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu, jehož molekuly mají hmotnost m_0, je dána funkčním předpisem

$$N(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3} v^2 \mathrm{e}^{\frac{m_0 v^2}{2kT}}\,.$$

a) Určete pro danou teplotu T daného plynu nejpravděpodobnější rychlost v_p.
b) Odvoďte vztah mezi nejpravděpodobnější rychlostí v_p a střední kvadratickou rychlostí

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}\,.$$

Řešení:

a) Hledáme maximum známé křivky. Platí

$$\frac{\mathrm{d}N(v)}{\mathrm{d}v} = \sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\frac{m_0}{kT}\right)^3} v \mathrm{e}^{\frac{m_0 v^2}{2kT}}\left(2 - \frac{m_0}{kT}v^2\right)\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = 0$ plyne $v = v_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$. Snadno se přesvědčíme, že pro $v < v_\mathrm{p}$ nabývá derivace kladných hodnot, tudíž funkce $N = N(v)$ roste, pro $v > v_\mathrm{p}$ je naopak derivace záporná, tudíž funkce klesá. Proto pro $v = v_\mathrm{p}$ nastává skutečně maximum.

b) Z porovnání vztahů pro v_p a v_k plyne $v_\mathrm{p} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}v_\mathrm{k}$.

Příklad 7.4: Perioda kmitů tuhé homogenní tyče délky l a zanedbatelné tloušťky, upevněné otáčivě ve vzdálenosti x od těžiště, je dána vztahem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,,$$

kde $J = \dfrac{1}{12}ml^2 + mx^2$ je moment setrvačnosti tyče o hmotnosti m vzhledem k ose otáčení umístěné ve vzdálenosti x od těžiště a $D = mgx$ je direkční moment.

a) Určete takovou vzdálenost x_1 osy otáčení od těžiště, pro kterou je perioda kmitů minimální.
b) Určete obecně tuto periodu T_min, a potom číselně pro $l = 1{,}00$ m, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Řešení:

a) Perioda kmitů po dosazení a úpravě je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12x^2}{12gx}}\,.$$

Vzhledem k monotónnosti druhé odmocniny stačí nalézt minimum výrazu pod odmocninou. Jeho derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{l^2 + 12x^2}{12gx}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}\right) = \frac{12x^2 - l^2}{12gx^2}\,.$$

Derivace je nulová pro $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}l = 0{,}289\,l$. Z tvaru derivace je dále zřejmé, že na uvažovaném intervalu $(0, l/2\rangle$ pro $x < x_1$ je derivace záporná a tedy funkce klesající, pro $x > x_1$ je derivace kladná a tedy funkce rostoucí. V bodě x_1 proto skutečně nastává minimum.

b) Minimální perioda je $T_\mathrm{min} = T(x_1) = 2\pi\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{l}{g}} = 1{,}52\ \mathrm{s}$.

(Pro osu na konci tyče vychází $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}} = 1{,}64$ s.)

Příklad 7.5: Na jednozvratné páce máme zdvihnout těleso o hmotnosti m umístěné ve vzdálenosti d od podpěry. Páku tvoří homogenní tyč s lineární hustotou λ.

a) Určete délku tyče x_1 tak, aby působící síla na její konci byla minimální.
b) Určete velikost $F_{\min}$ této síly.

Řešte obecně, pak pro hodnoty $m = 120$ kg, $d = 40$ cm, $\lambda = 8{,}00 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Řešení:

a) Pro momenty sil vzhledem k vodorovné ose otáčení kolmé k tyči a procházející bodem A podle momentové věty platí:

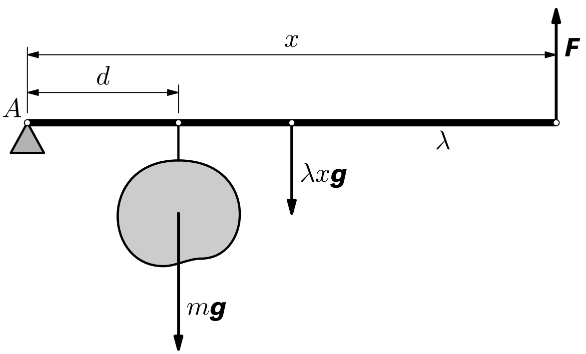
$$Fx = mgd + \lambda xg\frac{x}{2}\,,$$

kde λx je hmotnost tyče. Z rovnice vyjádříme sílu

$$F(x) = \frac{mgd}{x} + \frac{\lambda gx}{2}$$

a zderivujeme:

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \left(-\frac{md}{x^2} + \frac{\lambda}{2}\right)g\,.$$



Derivace je nulová pro $x_1 = \sqrt{\frac{2md}{\lambda}}$ (záporný kořen nemá fyzikální význam).
Druhá derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2F(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{mgd}{2x^3}$$

je pro $x = x_1$ kladná, při délce páky x_1 je síla skutečně minimální. Číselně vychází $x_1 = 3{,}46$ m.

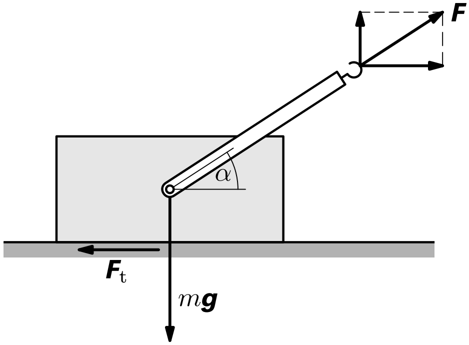
b) Hledaná minimální síla pak je $\mathrm{F}_{\mathrm{min}} = F(x_1) = g\sqrt{2\lambda md} = 272$ N.

Příklad 7.6: Kvádr o hmotnosti m máme vléci rovnoměrným pohybem po vodorovné podložce. Součinitel smykového tření mezi kvádrem a podložkou je f.

a) Určete úhel α_1 mezi působící silou a podložkou tak, aby velikost síly $\boldsymbol{F}$ byla nejmenší.

b) Určete tuto velikost F_{min}.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnotu $f = 0{,}7$.



Řešení:

a) Svislá složka $F \sin\alpha$ síly $\boldsymbol{F}$ způsobuje nadlehčení tělesa tak, že pro velikost třecí síly platí

$$F_{\mathrm{t}} = f(mg - F\sin\alpha)\,.$$

Vodorovná složka $F\cos\alpha$ síly $\boldsymbol{F}$ je při rovnoměrném pohybu rovna velikosti třecí síly F_{t}. Z rovnosti plyne

$$F = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}\,.$$

Hledáme takový úhel α_1, při kterém je velikost síly $\boldsymbol{F}$ minimální. Proto derivujeme velikost síly $\boldsymbol{F}$ podle úhlu α:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{fmg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(\cos\alpha + f\sin\alpha)^2}\,.$$

Z podmínky $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ plyne $\mathrm{tg}\,\alpha = f$. Jelikož pro $\alpha < \alpha_1$ je $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} < 0$ a pro $\alpha > \alpha_1$ je $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\alpha} > 0$, je pro $\alpha < \alpha_1$ funkce klesající a pro $\alpha > \alpha_1$ rostoucí. Pro úhel α_1 má funkce $F = F(\alpha)$ minimum. Číselně je $\alpha_1 = 35°$.

b) Nejprve sinus a kosinus nahradíme funkcí tangens. Ze vztahů

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

plyne pro $\alpha \in \langle 0, 90°\rangle$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\,.$$

Dosazením do rovnice

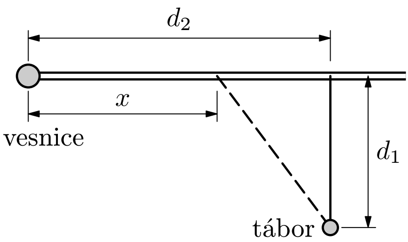
$$F = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \quad \text{dostaneme} \quad F = fmg\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{1+f\operatorname{tg}\alpha}\,.$$

Hledanou minimální velikost síly získáme položením $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_1 = f$. Po úpravě dostaneme $F_{\min} = \dfrac{fmg}{\sqrt{1+f^2}} = 0{,}57mg$.

Úloha 7.1: Těleso bylo vrženo ve výšce $h_0 = 12$ m nad vodorovným terénem počáteční rychlostí $v_0 = 18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ pod úhlem $\alpha = 35°$. Napište rovnici trajektorie vrhu a určete souřadnice nejvyššího bodu trajektorie.

Úloha 7.2: Určete výšku h_1, z níž musíme vrhnout těleso vodorovným směrem, aby dopadlo minimální rychlostí do dané vzdálenosti $d = 25$ m měřené ve vodorovné rovině od svislého průmětu místa vrhu. Určete tuto minimální rychlost $v_{\min}$ a počáteční rychlost vrhu v_0.

Úloha 7.3: Ze stanového tábora potřebují vyslat běžce se zprávou do blízké vesnice. Poběží-li po poli kolmo k přímé silnici ležící ve vzdálenosti $d_1 = 700$ m od tábora, bude muset ještě urazit po silnici vzdálenost $d_2 = 1\,200$ m. Rychlost běžce na poli je $v_1 = 3{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, na silnici $v_2 = 5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Pro běžce bude výhodnější běžet k silnici šikmo.



Určete vzdálenost x od vesnice, kde se musí dostat na silnici, aby celou trasu urazil v nejkratším čase. Určete tento minimální čas $t_{\min}$.

Úloha 7.4: Určete čas t_1, v němž je zrychlení z úlohy 4.1 minimální. Určete toto minimální zrychlení $a_{\min}$.

Úloha 7.5: Řetěz o hmotnosti m a délce l je za jeden konec zavěšen tak, že se druhým koncem dotýká země. Určete maximální kinetickou energii řetězu po uvolnění.

Úloha 7.6: Teplotní objemovou roztažnost vody lze v rozmezí teplot od 0 °C do 30 °C popsat rovnicí

$$V = V_0(1 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3)\,,$$

kde $\beta_1 = -6{,}43 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, $\beta_2 = 8{,}51 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-2}$, $\beta_3 = -6{,}79 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-3}$ jsou empiricky určené hodnoty a V_0 je objem při teplotě 0 °C.

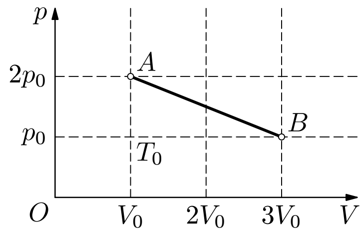
a) Určete při jaké teplotě $t_{\min}$ je podle uvedené aproximace objem v daném intervalu teplot minimální a při jaké teplotě $t_{\max}$ maximální.
b) Určete objemy vody $V_{\min}$, $V_{\max}$ při těchto teplotách.

Úloha 7.7: Z válcového kmene o průměru d máme vytesat trám obdélníkového průřezu. Prohnutí trámu podepřeného na obou koncích a zatíženého uprostřed silou $\boldsymbol{F}$ uprostřed trámu je při malém zatížení (tj. v mezích pružnosti) dáno vztahem

$$y = \frac{1}{4E}\,\frac{l^3}{a^3 b}F\,,$$

kde E je modul pružnosti, l délka, a výška a b šířka trámu. Určete rozměry a_0, b_0 trámu tak, aby při dané délce l a daném zatížení F byl průhyb trámu minimální. Určete tento minimální průhyb $y_{\min}$.

Úloha 7.8: Graf znázorňuje závislost tlaku ideálního plynu na objemu. Určete minimální a maximální teplotu a odpovídající objemy ideálního plynu při ději AB. Vyjádřete je pomocí teploty T_0, kterou měl plyn ve stavu s objemem V_0 a tlakem p_0.



Výsledky úloh

1.1, 1.2 $v(t) = 3At^2 + B$.

2.1 $v(t) = \dfrac{3}{2}A\sqrt{t}, \quad a(t) = \dfrac{3A}{4\sqrt{t}}$, pohyb s konstantním výkonem.

2.2 a) $h = \sqrt[3]{\dfrac{3Q_V h_0^2 t}{\pi R^2}}$, b) $v = \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \sqrt[3]{\dfrac{Q_V h_0^2}{9\pi R^2 t^2}}$, c) $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{Q_V h_0^2}{9\pi R^2 t^5}}$.

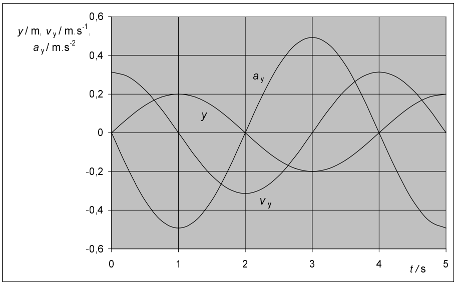
2.3 a) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k$, b) $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -8\pi k(r_0 - kt)$, c) $N = \dfrac{4\pi}{3V_1}(r_0 - kt)^3$,

d) $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{4\pi k}{V_1}(r_0 - kt)^2$.

2.4 $p_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}my_\mathrm{m}^2\sqrt{\dfrac{g^3}{l^3}} = 5{,}8\ \mathrm{mW}$.

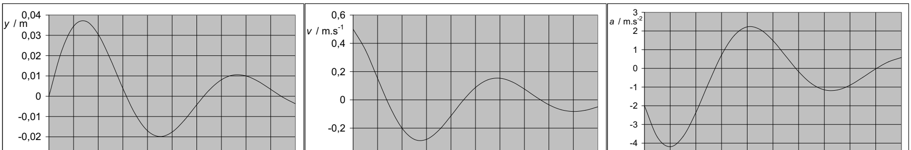
3.1 $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y_\mathrm{m}\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$,

$a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -y_\mathrm{m}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$.



3.2 $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt}(\omega\cos\omega t - b\sin\omega t)$,

$a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = y_\mathrm{m}\mathrm{e}^{-bt}\left[(b^2 - \omega^2)\sin\omega t - 2b\omega\cos\omega t\right]$.



3.3 a) $x = r\sin\omega t,\ y = r\cos\omega t,\ v_x = r\omega\cos\omega t,\ v_y = -r\omega\sin\omega t$,

$a_x = -r\omega^2\sin\omega t,\ a_y = -r\omega^2\cos\omega t$, kde $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T = 3\,600\ \mathrm{s}$.

b) $v = r\omega = 0{,}0035\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $a = r\omega^2 = 6{,}1\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

3.4 a) $v_x = -r\omega\sin\omega t,\ v_y = r\omega\cos\omega t,\ v_z = v_0,\ v = \sqrt{r^2\omega^2 + v_0^2}$.

b) $a_x = -r\omega^2\cos\omega t,\ a_y = -r\omega^2\sin\omega t,\ a_z = 0,\ a = r\omega^2$.

c) Velikost rychlosti je sice konstantní, ale mění se její směr.

d) Složením dvou harmonických pohybů se vzájemným fázovým posunutím o π/2 vzniká v rovině os x a y rovnoměrný pohyb po kružnici. Dalším složením s rovnoměrným přímočarým pohybem ve směru kolmém k rovině kružnice dostaneme rovnoměrný pohyb po šroubovici.

3.5 a) $x = v_0 t + r \sin \frac{v_0}{R} t, \quad y = r \cos \frac{v_0}{R} t,$

$$v_x = v_0 \left(1 + \frac{r}{R} \cos \frac{v_0}{R} t\right), \quad v_y = -v_0 \frac{r}{R} \sin \frac{v_0}{R} t,$$

$$a_x = -\frac{r v_0^2}{R^2} \sin \frac{v_0}{R} t, \quad a_y = -\frac{r v_0^2}{R^2} \cos \frac{v_0}{R} t.$$

b) $v = v_0 \sqrt{2\left(1 + \frac{r}{R} \cos \frac{v_0}{R} t\right)}, \quad a = \frac{r v_0^2}{R^2}.$

c) $v_{\min} = v_0 \sqrt{2\left(1 - \frac{r}{R}\right)} \quad \text{pro} \quad t = (2k+1)\frac{\pi R}{v_0} = kT + \frac{T}{2},$

$$v_{\max} = v_0 \sqrt{2\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \quad \text{pro} \quad t = k\frac{2\pi R}{v_0} = kT.$$

3.6 a) Hmotný bod koná vodorovný vrh v homogenním tíhovém poli za současného harmonického pohybu v rovině kolmé k rovině vrhu.

b) $\boldsymbol{v}(t) = v_0 \cdot \boldsymbol{i} + y_{\mathrm{m}} \omega \sin \omega t \cdot \boldsymbol{j} - gt \cdot \boldsymbol{k}.$

c) $\boldsymbol{a}(t) = y_{\mathrm{m}} \omega^2 \cos \omega t \cdot \boldsymbol{j} - g \cdot \boldsymbol{k}.$

d) $v(t) = \sqrt{v_0^2 + y_{\mathrm{m}}^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + g^2 t^2}.$

e) $a(t) = \sqrt{y_{\mathrm{m}}^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + g^2}.$

f) $a_{\min} = g, \quad a_{\max} = \sqrt{y_{\mathrm{m}}^2 \omega^4 + g^2}.$

3.7 $x = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}, \; v_x = -r\omega \sin \omega t \left(1 + \frac{r \cos \omega t}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}\right).$

4.1 $a_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{P}{2mt}}, \quad a_{\mathrm{n}} = \frac{2P}{mr} t, \quad a = \sqrt{\frac{P}{m}\left(\frac{1}{2t} + \frac{4P}{mr^2} t^2\right)}.$

5.1 $F = v \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 30 \cdot \frac{800}{60}\ \mathrm{N} = 40\ \mathrm{N}.$

5.2 1a) $F_x = 0.$

1b) $F_x = v_x \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 6 \cdot 15\ \mathrm{N} = 90\ \mathrm{N}$, lokomotiva táhne.

1c) $F_x = v_x \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -6 \cdot 15\ \mathrm{N} = -90\ \mathrm{N}$, lokomotiva je tlačena.

2a) $F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$, číselně $F_x = (60\,000 - 15t) \cdot 0{,}4 = 24\,000 - 6t$.

2b) $F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_x\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, číselně $F_x = (60\,000-15t)\cdot 0{,}4 + 6\cdot 15 = 24\,090 - 6t$.

2c) $F_x = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_x\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, číselně $F_x = (60\,000-15t)\cdot 0{,}4 - 6\cdot 15 = 23\,910 - 6t$.

5.3 $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (400\,000 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 60)\ \mathrm{N} = 41\,500\ \mathrm{N}$.

5.4 $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, číselně $F = (8\,000 - 4t) \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 4 = 4\,080 - 2t$.

5.5 $F = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = (m_0 + kt)a + akt = m_0 a + 2akt$.

6.1 a) $9\,600\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
b) $a(t_1) = 2{,}5\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $\quad a(t_2) = 11{,}0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

7.1 $y(x) = h_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$,

$x_1 = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = 15{,}5\ \mathrm{m}, \quad y_1 = h_0 + \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 17{,}4\ \mathrm{m}$.

7.2 $h_1 = \dfrac{d}{2} = 12{,}5\ \mathrm{m}, \quad v_{\min} = \sqrt{2gd} = 22{,}1\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}, \quad v_0 = \sqrt{gd} = 15{,}7\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

7.3 $x = d_2 - d_1 \dfrac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = 675\ \mathrm{m}, \quad t_{\min} = \dfrac{d_2}{v_2} + \dfrac{d_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} = 427\ \mathrm{s}$.

7.4 $t_1 = \sqrt[3]{\dfrac{mr^2}{8P}}, \quad a_{\min} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{P^2}{m^2 r}}$.

7.5 $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{4} mgl$ v okamžiku, kdy je v pohybu polovina řetězu.

7.6 a) $t_{\min} = 3{,}97\ ^\circ\mathrm{C}, \quad t_{\max} = 30\ ^\circ\mathrm{C}$.
b) $V_{\min} = 0{,}999\,87\, V_0, \quad V_{\max} = 1{,}003\,90\, V_0$.

7.7 $a_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} d, \quad b_0 = \dfrac{1}{2} d, \quad y_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9E} \dfrac{l^3}{d^4} F$.

7.8 $V(T_{\min}) = V_0, \quad T_{\min} = 2T_0, \quad V(T_{\max}) = \dfrac{5}{2} V_0, \quad T_{\max} = \dfrac{25}{8} T_0$.

Dodatek – procvičování derivací

Příklad: Nalezněte derivace funkcí:

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ c) $y = \sin^2 x$ d) $y = \sqrt{1 - x^2}$

Řešení:

a) Odmocninu převedeme na mocninu a užijeme vzorec (D4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) Užitím (P4) pro derivaci podílu dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x\right)\cdot \cos x - \sin x \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Současně jsme tak dokázali vzorec (D7).

c) Funkce je složená, zavedeme substituci. Označme $z = \sin x$ vnitřní funkci, pak $y = z^2$. Podle (P5) je derivace této složené funkce rovna součinu derivace vnější funkce y podle vnitřní funkce z a derivace vnitřní funkce z podle proměnné x, tedy

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \quad \text{(formálně je výraz rozšířen diferenciálem } \mathrm{d}z\text{).}$$

Jelikož $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2 = 2z$ a $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$,

dostaneme po dosazení $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2z\cdot\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$.

d) Obdobně $y = \sqrt{z}$, $z = 1 - x^2$.

Tedy $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \dfrac{1}{2\sqrt{z}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2x$.

Součin derivací je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Po jisté zkušenosti je možno upustit od substituce a psát rovnou

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Úloha: Nalezněte derivace funkcí:

a) $y = 0{,}5x^4 - 6x^3 + 2$
b) $y = ax^2 + bx + c$
c) $y = x^{-\frac{3}{2}}$
d) $y = \dfrac{1}{x}$
e) $y = (3x - 1)^2$
f) $y = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
g) $y = \sin x^2$
h) $y = \sqrt{\cos x}$
i) $y = 2\cos 2x$
j) $y = \sin x \cos x$
k) $y = \sin 3x \cos^2 x$
l) $y = a \sin(bx + c)$
m) $y = \ln 2x$
n) $y = x^2 \ln x$
o) $y = \ln(x^2 + 1)$
p) $y = 3\mathrm{e}^{-2x}$
q) $y = x\mathrm{e}^{-x}$
r) $y = \mathrm{e}^x \cos x$
s) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 1}$
t) $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
u) $y = \ln \dfrac{x - 1}{x + 1}$
v) $y = \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$
w) $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$
x) $y = (1 + \sin x) \operatorname{tg} x$
y) $y = \operatorname{tg} \sqrt{3x + 1}$
z) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg} 2x}$

Výsledky:

a) $2x^3 - 18x^2$
b) $2ax + b$
c) $-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$
d) $-\dfrac{1}{x^2}$
e) $6(3x - 1)$
f) $1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$
g) $2x \cos x^2$
h) $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
i) $-4 \sin 2x$
j) $\cos 2x$
k) $3 \cos 3x \cos^2 x - \sin 3x \sin 2x$
l) $ab \cos(bx + c)$
m) $\dfrac{1}{x}$
n) $x(2 \ln x + 1)$
o) $\dfrac{2x}{x^2 + 1}$
p) $-6\mathrm{e}^{-2x}$
q) $(1 - x)\mathrm{e}^{-x}$
r) $\mathrm{e}^x (\cos x - \sin x)$
s) $\dfrac{x^4 - x^2 - 10x + 2}{(x^2 - 1)^2}$
t) $\dfrac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$
u) $\dfrac{2}{x^2 - 1}$
v) $\dfrac{1}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}$
w) $\dfrac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2}$
x) $\sin x + \dfrac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$
y) $\dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1} \cos^2 \sqrt{3x + 1}}$
z) $\dfrac{2\mathrm{e}^{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x}$