MOMENT SETRVAČNOSTI

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Josef Jírů

Obsah

Úvod

Podle 2. Newtonova pohybového zákona, nazývaného též zákonem síly, je při stálé působící síle zrychlení tělesa při posuvném pohybu nepřímo úměrné jeho hmotnosti. Závislost zapíšeme vztahem $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$. To znamená, že stejná síla způsobí tím větší změnu pohybu tělesa (urychlení, zpomalení, změnu směru pohybu), čím má těleso menší hmotnost. **Veličina hmotnost** tak **charakterizuje setrvačnost tělesa při posuvném pohybu**, tj. jeho schopnost v daném pohybu setrvávat, neboli odolávat změnám pohybu.

V jednoduchém případě stejná síla, třeba o velikosti 3 N, působící na lehký míč o hmotnosti $0,2$ kg, jej bude uvádět do pohybu se zrychlením o velikosti $15\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Bude-li však tato síla 3 N působit na atletickou kouli o hmotnosti zhruba 7 kg, bude ji uvádět do pohybu se zrychlením zhruba $0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

A potlačíme-li stejnou silou 3 N bruslaře o hmotnosti 60 kg, bude jeho zrychlení pouze $0{,}05\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Obdobná situace nastává při rotačním pohybu, kdy máme urychlit či zpomalit otáčející se těleso. Ukážeme si, že schopnost tělesa v daném otáčení setrvávat též závisí na jeho hmotnosti, ale navíc i na tom, jak daleko je jeho hmota od osy otáčení rozmístěna. **Setrvačnost tělesa při rotačním pohybu charakterizuje veličina moment setrvačnosti**.

Právě momentem setrvačnosti se tento studijní text zabývá. Nejprve tento pojem vybudujeme, ukážeme jeho vlastnosti a pro řadu těles odvodíme konkrétní vztah. V další fázi ukážeme jeho použití při rotačním pohybu. Celý poznávací proces momentu setrvačnosti a jeho aplikace probíhá na konkrétních podrobně rozvedených a vyřešených příkladech. Do textu je na vybraných místech postupně vloženo 16 úloh k procvičení, jejichž řešení, často s nápovědou či postupem, je uvedeno na závěr. Součástí textu je i bližší pojednání o třecí síle a přehledná tabulka porovnávající posuvný a rotační pohyb.

Text je napsán především pro řešitele FO kategorií B a C, avšak podle schopností a zájmu se s ním mohou seznamovat jak mladší, tak starší studenti. Je možné si též pouze vyhledat konkrétní problém, který příležitostně potřebujete řešit.

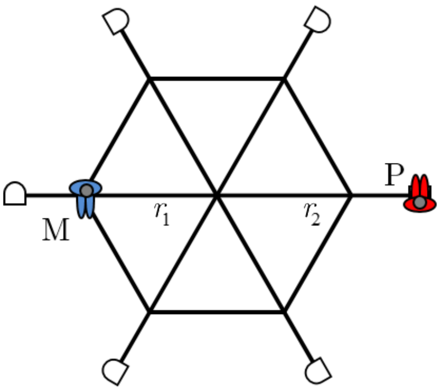
Za kompletní pečlivou kontrolu děkuji RNDr. Radce Horákové. Též děkuji gymnazistům Danielu Švecovi a Radimu Švecovi za poznámky ze studentského pohledu.

Autor

1. Moment setrvačnosti

Matěj a Pavlína se nechali roztlačit na vozíku tak, že dosáhli konečné rychlosti $v = 3{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Hmotnost Matěje je $m_1 = 60$ kg, hmotnost Pavlíny $m_2 = 40$ kg. Jejich kinetická energie (bez vozíku) je

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v^2 = \frac{1}{2}(60 + 40)\cdot 3^2\ \mathrm{J} = 450\ \mathrm{J}.$$



Matěj s Pavlínou se v parku usadili na prázdný kolotoč tak, že Matěj vylezl na konstrukci kolotoče ve vzdálenosti $r_1 = 2{,}0$ m od osy otáčení a Pavlína si sedla na sedačku ve vzdálenosti $r_2 = 3{,}0$ m od osy otáčení. Nechali se roztočit tak, že měli stejnou kinetickou energii jako na vozíku. Určíme jejich obvodové v_1 a v_2.
Tentokrát se pohybují společnou úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}.$$

Jejich kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)\omega^2.$$

Vyjádříme úhlovou rychlost:

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_k}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 450}{60\cdot 2^2 + 40\cdot 3^2}}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = \sqrt{1{,}5}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}.$$

Hledané obvodové rychlosti pak jsou

$$v_1 = r_1\omega = 2\cdot\sqrt{1{,}5}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 2{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$
$$v_2 = r_2\omega = 3\cdot\sqrt{1{,}5}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Z ukázky je zřejmé, že určit kinetickou energii otáčivého pohybu je složitější než kinetickou energii posuvného pohybu. Matěj a Pavla se pohybovali různými obvodovými rychlosti, ale měli stejnou úhlovou rychlost. Proto je vhodné kinetickou energii rotačního pohybu vyjadřovat pomocí úhlové rychlosti

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Výraz v závorce

$$J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$$

charakterizuje popisovanou soustavu dvou osob z hlediska rotace kolem osy a nazývá se **moment setrvačnosti**. Obsahuje kombinaci hmotnosti těles a druhou mocninu jejich vzdálenosti od osy otáčení. V našem případě šlo pouze o dvě tělesa považované za hmotné body. Později se však naučíme vypočítat i kinetickou energii kolotoče, jehož hmota je daným způsobem rozložena od nulové vzdálenosti do vzdálenosti r_2 od osy otáčení.

Zavedli jsme tak **moment setrvačnosti hmotného bodu** o hmotnosti m, který se nachází ve vzdálenosti r od osy otáčení:

$$J = mr^2$$

Obecně je rotující těleso sestaveno z různého počtu hmotných elementů nebo má nějakým způsobem rozloženou hmotu vzhledem k ose otáčení (vrtule, rotor turbíny, rotor elektromotoru, kolo automobilu, kolotoč, kyvadlo, ...).

Moment setrvačnosti tělesa otáčivého kolem pevné osy charakterizuje **setrvačnost** tohoto tělesa při otáčivém pohybu, podobně jako **hmotnost** tělesa charakterizuje jeho **setrvačnost** při posuvném pohybu. Čím má těleso větší setrvačnost (větší hmotnost u posuvného pohybu, větší moment setrvačnosti u rotačního pohybu), tím obtížněji mění svůj pohybový stav.

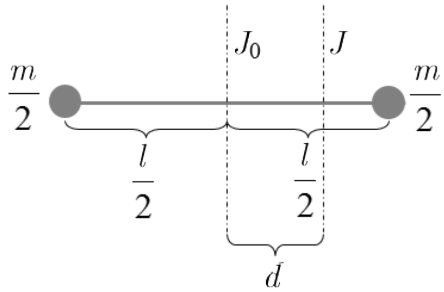
Např. u vozíku je snazší uvést do pohybu či zastavit vozík s menší celkovou hmotností, u kolotoče je snazší uvést do pohybu či zastavit kolotoč také s menší celkovou hmotností, ale také když pasažéři budou rozmístěni blíže k ose otáčení.

Moment setrvačnosti tělesa závisí na jeho hmotnosti a na rozmístění jeho hmoty vzhledem k ose otáčení.

2. Posunutí osy otáčení

Činka o hmotnosti m se skládá ze dvou shodných koulí, jejichž středy jsou ve vzájemné vzdálenosti l. Situaci si zjednodušíme modelem, v němž zanedbáme poloměr koulí vzhledem k délce spojnice a zanedbáme hmotnost tyče vzhledem k hmotnosti koulí. Jinými slovy máme dva hmotné body o celkové hmotnosti m, spojené nehmotnou spojnicí délky l.

a) Vyjádříme moment setrvačnosti J_0 činky vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé k podélné ose činky.
b) Nyní osu otáčení posuneme o vzdálenost d ve směru podélné osy činky a vyjádříme moment setrvačnosti J činky vzhledem k této ose.



a) Sečteme dva stejné momenty setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti $m/2$ ve vzdálenosti $l/2$ od osy otáčení

$$J_0 = 2 \cdot \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} ml^2$$

b) Posunutím osy se změní vzdálenosti, oba momenty setrvačnosti opět sečteme

$$J = \frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}+d\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}-d\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{l^2}{4}+2\frac{l}{2}d+d^2+\frac{l^2}{4}-2\frac{l}{2}d+d^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{l^2}{2}+2d^2\right) = \frac{1}{4}ml^2+md^2 = J_0+md^2.$$

Rovnoběžným posunutím osy procházející těžištěm se moment setrvačnosti zvětšil o hodnotu, která je přímo úměrná druhé mocnině tohoto posunutí. Z toho plyne, že moment setrvačnosti je nejmenší vzhledem k té z navzájem rovnoběžných os, která prochází těžištěm tělesa.

Tento poznatek můžeme zobecnit na libovolné těleso a zformulovat Steinerovu větu.

3. Steinerova věta

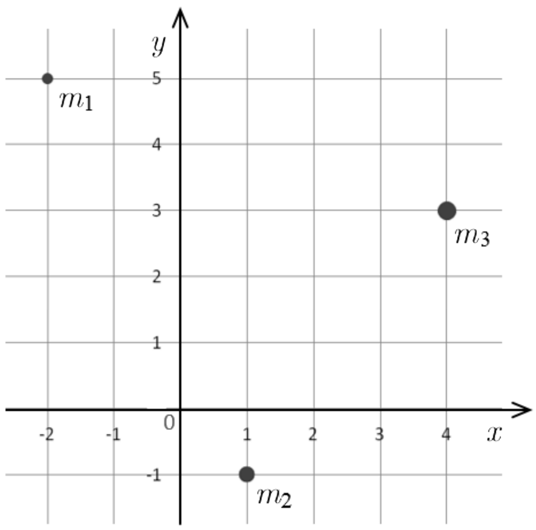
Je-li J_0 moment setrvačnosti tělesa o hmotnosti m vzhledem k ose procházející jeho těžištěm, pak moment setrvačnosti tohoto tělesa vzhledem k ose s ní rovnoběžné umístěné ve vzdálenosti d je dán vztahem

$$J = J_0 + md^2.$$

Než Steinerovu větu dokážeme, najdeme vztah pro těžiště soustavy hmotných bodů.

4. Těžiště

Těleso tvoří tři malé kuličky (hmotné body) o hmotnostech m_1, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = 3m_1$, které mají v soustavě Oxy souřadnice $[-2; 5]$, $[1;\ -1]$, $[4;\ 3]$.



Určíme souřadnice $[x_T;\ y_T]$ těžiště tělesa, nejprve obecně, pak pro konkrétní násobky hmotnosti a konkrétní souřadnice.

Souřadnice těžiště splňují rovnice

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot x_T = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3,$$
$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot y_T = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3.$$

Z rovnic plyne

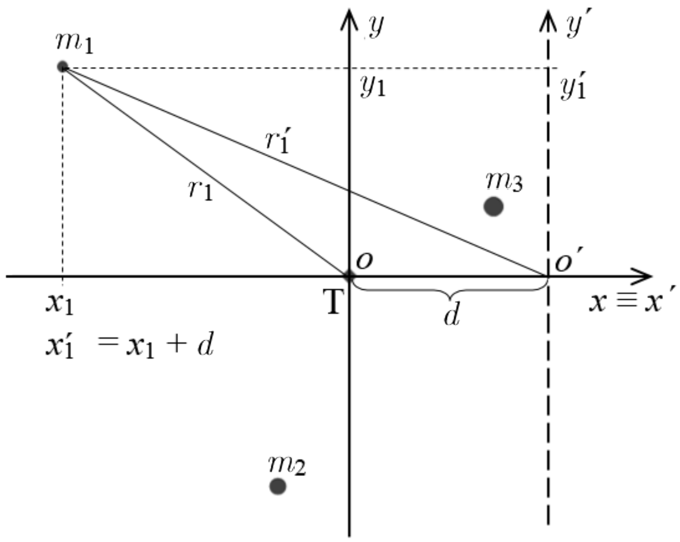
$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (*) \quad y_T = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Dosazením dostaneme

$$x_T = \frac{m_1 \cdot (-2) + 2m_1 \cdot 1 + 3m_1 \cdot 4}{m_1 + 2m_1 + 3m_1} = 2, \quad y_T = \frac{m_1 \cdot 5 + 2m_1 \cdot (-1) + 3m_1 \cdot 3}{m_1 + 2m_1 + 3m_1} = 2.$$

5. Důkaz Steinerovy věty

Použijeme předchozí těleso složené ze tří hmotných bodů, jeho hmotnost je $m = m_1 + m_2 + m_3$. Počátek soustavy souřadnic zvolíme tentokrát v těžišti a přidáme čárkovanou soustavu souřadnic posunutou ve směru osy x o zvolenou vzdálenost d. Kolmo k rovině hmotných bodů (kolmo k nákresně) proložíme dvě rotační osy o a o', z nichž osa o prochází těžištěm a osa o' počátkem čárkované soustavy souřadnic.



Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o:

$$J_0 = J_{01} + J_{02} + J_{03} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 =$$
$$= m_1 \left(x_1^2 + y_1^2\right) + m_2 \left(x_2^2 + y_2^2\right) + m_3 \left(x_3^2 + y_3^2\right).$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose o':

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = m_1 {r'}_1^2 + m_2 {r'}_2^2 + m_3 {r'}_3^2 =$$
$$= m_1 \left({x'}_1^2 + {y'}_1^2\right) + m_2 \left({x'}_2^2 + {y'}_2^2\right) + m_3 \left({x'}_3^2 + {y'}_3^2\right) =$$

…čárkované souřadnice každého bodu nahradíme nečárkovanými, tj. $x' = x + d$, $y' = y$ …

$$= m_1\left[(x_1+d)^2+y_1^2\right]+m_2\left[(x_2+d)^2+y_2^2\right]+m_3\left[(x_3+d)^2+y_3^2\right]=$$

$$= m_1\left[x_1^2+2x_1d+d^2+y_1^2\right]+m_2\left[x_2^2+2x_2d+d^2+y_2^2\right]+m_3\left[x_3^2+2x_3d+d^2+y_3^2\right]=$$

$$= m_1\left(x_1^2+y_1^2\right)+2m_1x_1d+m_1d^2+m_2\left(x_2^2+y_2^2\right)+$$

$$+2m_2x_2d+m_2d^2+m_3\left(x_3^2+y_3^2\right)+2m_3x_3d+m_3d^2=$$

…součet 1., 4. a 7. členu je moment setrvačnosti J_0 tělesa vzhledem k ose o …

$$= J_0+2d\left(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3\right)+\left(m_1+m_2+m_3\right)d^2=$$

…závorka 2. členu je nulová, protože představuje čitatele ve vztahu (*), který určuje x-ovou souřadnici těžiště tělesa …

$$= J_0+2d\cdot 0+md^2=J_0+md^2.$$

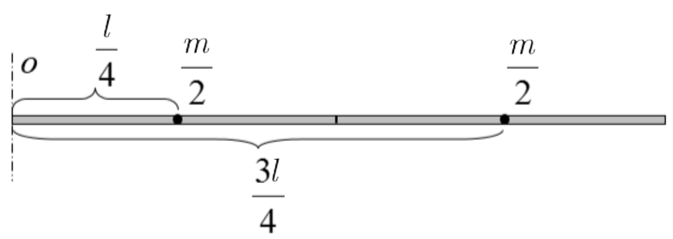
Odvození platí i v případě, kdy hmotné body neleží v rovině určené osami x, y. Obrázek pak představuje kolmé průměty hmotných bodů do nákresny a r, r' zůstávají vzdálenosti hmotných bodů od os otáčení o, o'.

Libovolné těleso lze rozložit na obrovské množství hmotných elementů se zanedbatelnými rozměry. Rozšíříme-li předchozí postup pro tři hmotné elementy na jejich libovolný počet, pak bez újmy na obecnosti lze Steinerovu větu považovat za dokázanou.

6. Tyč (těžiště částí)

Dosud jsme uvažovali pouze momenty setrvačnosti hmotných bodů. Nyní se pokusíme odvodit moment setrvačnosti homogenní tyče zanedbatelné tloušťky o hmotnosti m a délky l vzhledem k ose kolmé k tyči a procházející jejím koncovým bodem. Tyč rozdělíme na několik stejných úseků, hmotu každého úseku soustředíme do jeho těžiště a momenty setrvačnosti sečteme.

Tyč nejprve rozdělíme na poloviny, každá z nich má hmotnost $\frac{m}{2}$. Těžiště první poloviny tyče bude ve vzdálenosti $\frac{l}{4}$, těžiště druhé poloviny pak ve vzdálenosti $\frac{3l}{4}$ od osy otáčení.



Vyjádříme moment setrvačnosti soustavy dvou hmotných bodů umístěných v prvním a v druhém těžišti:

$$J_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{1+9}{32}ml^2 = \frac{5}{16}ml^2 = 0{,}312\,500\,ml^2.$$

Podobně moment setrvačnosti soustavy tří hmotných bodů umístěných v těžištích třetin tyče bude:

$$J_3 = \frac{m}{3}\left(\frac{l}{6}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{3l}{6}\right)^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{5l}{6}\right)^2 = \frac{1+9+25}{108}ml^2 = \frac{35}{108}ml^2 \doteq 0{,}324\,074\,ml^2.$$

Pro pět hmotných bodů umístěných v těžištích pětin tyče dostaneme

$$J_5 = \frac{m}{5}\left(\frac{l}{10}\right)^2 + \frac{m}{5}\left(\frac{3l}{10}\right)^2 + \frac{m}{5}\left(\frac{5l}{10}\right)^2 + \frac{m}{5}\left(\frac{7l}{10}\right)^2 + \frac{m}{5}\left(\frac{9l}{10}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+9+25+49+81}{500}ml^2 = \frac{33}{100}ml^2 = 0{,}330\,000\,ml^2.$$

Zdá se, že jsme na dobré cestě, jen je třeba tyč rozdělit na velký počet stejných částí a sečíst momenty setrvačnosti soustavy odpovídajících hmotných bodů. Tady nám pomůže např. Excel. Zvolíme-li 60 bodů, dostaneme

$$J_{60} = \frac{m}{60}\left(\frac{l}{120}\right)^2 + \frac{m}{60}\left(\frac{3l}{120}\right)^2 + ... + \frac{m}{60}\left(\frac{119l}{120}\right)^2 =$$

$$= \frac{1+9+...+14\,161}{864\,000}ml^2 = \frac{13\,333}{40\,000}ml^2 = 0{,}333\,325\,ml^2.$$

Pro 200 bodů dostaneme

$$J_{200} = \frac{53\,333}{160\,000}ml^2 \doteq 0,333\,331\,ml^2.$$

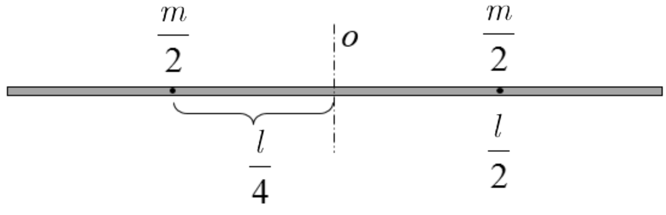
Vypadá to, že se přibližujeme k číselné hodnotě $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ a že moment setrvačnosti by mohl být $J = \frac{1}{3}ml^2$.

K ověření hypotézy zkusíme ještě jinou metodu.

7. Tyč (části a celek)

Odvodíme moment setrvačnosti homogenní tyče zanedbatelné tloušťky o hmotnosti m a délky l vzhledem k ose kolmé k tyči a procházející těžištěm tyče.

Moment setrvačnosti tyče pak bude mít tvar $J_0 = kml^2$, kde k je hledaný číselný koeficient.



Tyč rozpůlíme, každá část má hmotnost $m/2$ a délku $l/2$. Pak moment setrvačnosti tyče je součtem momentů setrvačnosti jejích částí vzhledem k téže ose otáčení. Pro dvě krátké tyče o poloviční délce je však osa otáčení v jednom z jejich koncových bodů, tj. ve vzdálenosti $l/4$ od svého těžiště, proto užijeme též Steinerovu větu. Pak platí rovnice

$$kml^2 = 2\left[k\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2\right].$$

Z rovnice plyne

$$k = \frac{1}{12}.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm je $J_0 = \frac{1}{12}ml^2$. Pomocí Steinerovy věty dostaneme moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející koncovým bodem tyče

$$J = J_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Tím je hypotéza z předchozího řešení dokázána.

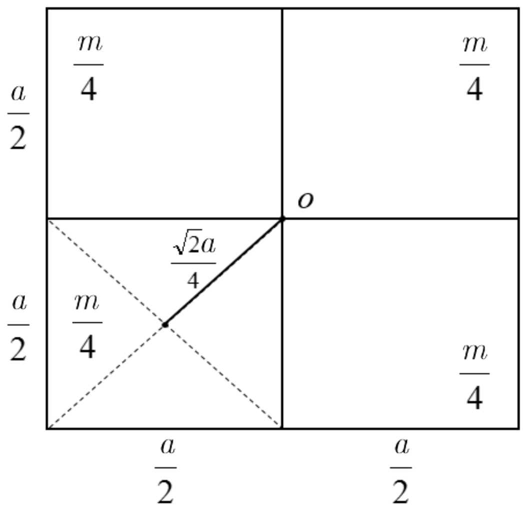
Užitá metoda se pro tyč osvědčila, zkusíme ji proto použít i pro některá další tělesa.

8. Čtvercová deska

Odvodíme moment setrvačnosti čtvercové desky o hmotnosti m a s délkou hrany a vzhledem k ose kolmé k desce a procházející těžištěm desky.

Moment setrvačnosti čtvercové desky pak bude mít tvar $J_0 = kma^2$, kde k je hledaný číselný koeficient.

Desku rozdělíme na 4 shodné čtvercové desky, každá má hmotnost $m/4$ a hranu délky $a/2$. Pak moment setrvačnosti desky je součtem momentů setrvačnosti dílčích desek vzhledem k téže ose o otáčení.



Pro dílčí desky je však osa otáčení o v jednom ze svých vrcholů, tj. ve vzdálenosti poloviny své úhlopříčky od svého těžiště, proto užijeme též Steinerovu větu. Pak platí rovnice

$$kma^2 = 4\left[k\frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^2\right].$$

Z rovnice plyne

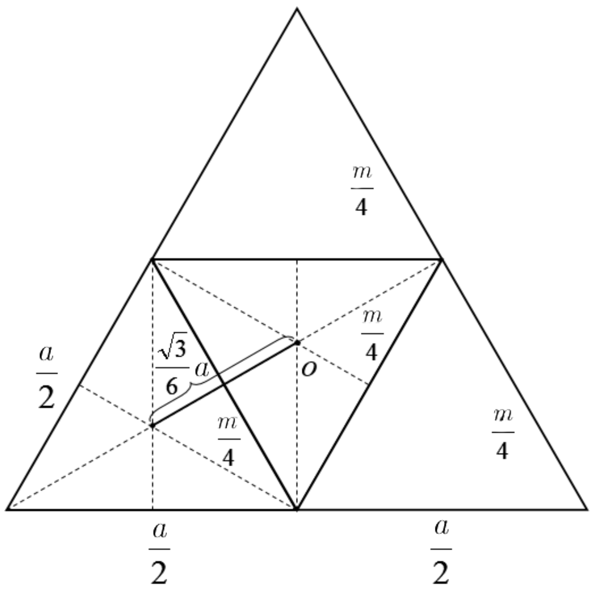
$$k = \frac{1}{6}.$$

Tedy moment setrvačnosti čtvercové desky je

$$J_0 = \frac{1}{6}ma^2. \tag{1}$$

9. Deska tvaru rovnostranného trojúhelníku

Odvodíme moment setrvačnosti desky tvaru rovnostranného trojúhelníku o hmotnosti m a s délkou hrany a vzhledem k ose kolmé k desce a procházející těžištěm desky.
Moment setrvačnosti desky pak bude mít tvar $J_0 = kma^2$, kde k je hledaný číselný koeficient.
Trojúhelníkovou desku rozdělíme na 4 shodné desky stejného tvaru, každá má hmotnost $m/4$ a délku hrany $a/2$. Pak moment setrvačnosti trojúhelníkové desky je součtem momentů setrvačnosti jejích částí vzhledem k téže ose otáčení.



Střední deska má osu otáčení ve svém těžišti, zbývající tři desky ji mají ve vzdálenosti $h/3$ od těžiště celé desky, kde

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

je výška původního trojúhelníku. Proto opět užijeme Steinerovu větu. Pak platí rovnice

$$kma^2 = k\frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3\left[k\frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right].$$

Z rovnice plyne

$$k = \frac{1}{12}.$$

Moment setrvačnosti desky tvaru rovnostranného trojúhelníku je

$$J_0 = \frac{1}{12}ma^2. \tag{2}$$

10. Deska tvaru pravidelného šestiúhelníku

Pravidelný šestiúhelník se stranou délky a se skládá ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků se stranou téže délky a. Zvolíme-li m hmotnost šestiúhelníkové desky, bude mít každá trojúhelníková deska hmotnost $m/6$. Užijeme vztah (2), přičemž změníme osu otáčení o_1 procházející těžištěm na osu o_2 procházející vrcholem trojúhelníku, které jsou ve vzájemné vzdálenosti

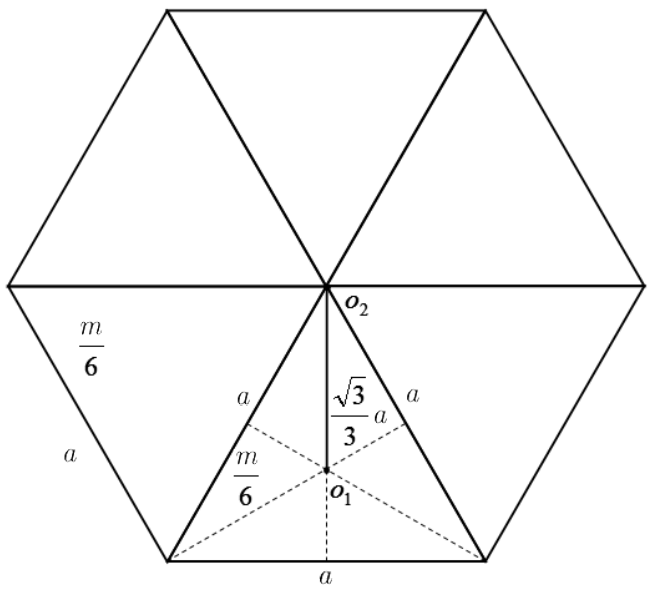
$$d = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Moment setrvačnosti desky tvaru rovnostranného trojúhelníku vzhledem k ose o_2 je

$$J_{\text{troj}} = \frac{1}{12}\frac{m}{6}a^2 + \frac{m}{6}d^2 = \frac{1}{12}\frac{m}{6}a^2 + \frac{m}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{5}{12}\frac{m}{6}a^2.$$

Pak deska tvaru pravidelného šestiúhelníku má vzhledem k ose procházející jeho těžištěm moment setrvačnosti

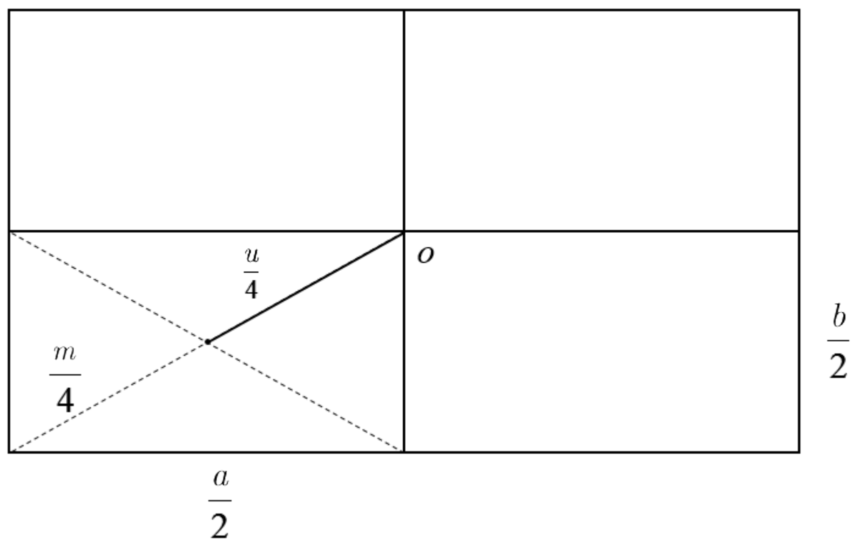
$$J_0 = 6J_{\text{troj}} = 6 \cdot \frac{5}{12}\frac{m}{6}a^2 = \frac{5}{12}ma^2. \tag{3}$$



11. Obdélníková deska

Odvodíme moment setrvačnosti obdélníkové desky vzhledem k ose kolmé k desce a procházející těžištěm desky.

Uvažujme obdélník s danou úhlopříčkou u, kterou zvolíme jako typický rozměr obdélníku. Jeho proměnné strany a, b přitom splňují vztah $u^2 = a^2 + b^2$. Předpokládejme, že moment setrvačnosti obdélníkové desky o hmotnosti m bude mít tvar $J = kmu^2$, kde k je hledaný číselný koeficient.



Desku tvaru obdélníka rozdělíme na 4 shodné obdélníkové desky, každá má hmotnost $m/4$ a rozměry $a/2$ a $b/2$. Pak moment setrvačnosti původní obdélníkové desky je součtem momentů setrvačnosti jejích částí vzhledem k téže ose otáčení. Pro malé desky je osa otáčení v jednom ze svých vrcholů, tj. mimo své těžiště, proto užijeme též Steinerovu větu. Pak platí rovnice

$$kmu^2 = 4\left[k\frac{m}{4}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{u}{4}\right)^2\right].$$

Z rovnice plyne

$$k = \frac{1}{12}.$$

Moment setrvačnosti obdélníkové desky je

$$J_0 = \frac{1}{12}mu^2 = \frac{1}{12}m\left(a^2 + b^2\right).$$

Pro čtvercovou desku, kde $a = b$, pak dostaneme již známý vztah

$$J_0 = \frac{1}{6}ma^2.$$

Pro tyč bez ohledu na tvar profilu (příčné rozměry jsou zanedbatelné), kde $a = l$,

$b = 0$, pak též dostaneme známý vztah

$$J_0 = \frac{1}{12} m l^2.$$

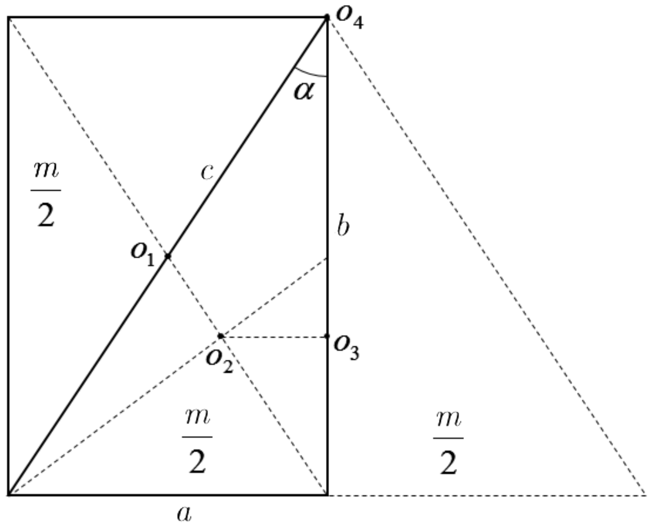
12. Deska tvaru rovnoramenného trojúhelníku, pravidelného n-úhelníku a kruhu

Uvažujme obdélníkovou desku o hmotnosti m s rozměry a, b. Již víme, že její moment setrvačnosti vzhledem k ose o_1 procházející jejím středem kolmo k desce je

$$J_0 = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{12} m c^2,$$

kde c je její úhlopříčný rozměr. Desku úhlopříčným řezem rozdělíme na dvě shodné desky tvaru pravoúhlého trojúhelníku. Na každou z nich připadá vzhledem k téže ose o_1 poloviční moment setrvačnosti:

$$J_{o1} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} \left(a^2 + b^2\right) = \frac{1}{12} \frac{m}{2} c^2.$$



Užitím Steinerovy věty ve tvaru $J_0 = J - md^2$ (osu přemisťujeme do těžiště) dostaneme moment setrvačnosti trojúhelníkové desky vzhledem k ose o_2 procházející jejím těžištěm:

$$J_{o2} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} c^2 - \frac{m}{2} \left(\frac{c}{6}\right)^2 = \frac{1}{18} \frac{m}{2} c^2.$$

Opět užitím Steinerovy věty přejdeme k ose o_3:

$$J_{o3} = \frac{1}{18} \frac{m}{2} c^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \frac{m}{2} c^2 + \frac{1}{9} \frac{m}{2} a^2 = \frac{1}{18} \frac{m}{2} \left(c^2 + 2a^2\right).$$

Spojením dvou shodných trojúhelníkových desek se společným rozměrem b dostaneme desku tvaru rovnoramenného trojúhelníka se základnou $2a$ a s rameny c. Deska uvedeného tvaru má již opět hmotnost m a její moment setrvačnosti vzhledem k téže ose o_3 je

$$J'_{o3} = \frac{1}{18} m \left(c^2 + 2a^2\right).$$

Dále označme 2α úhel při hlavním vrcholu. Pak moment setrvačnosti vzhledem k ose o_4 procházející hlavním vrcholem je

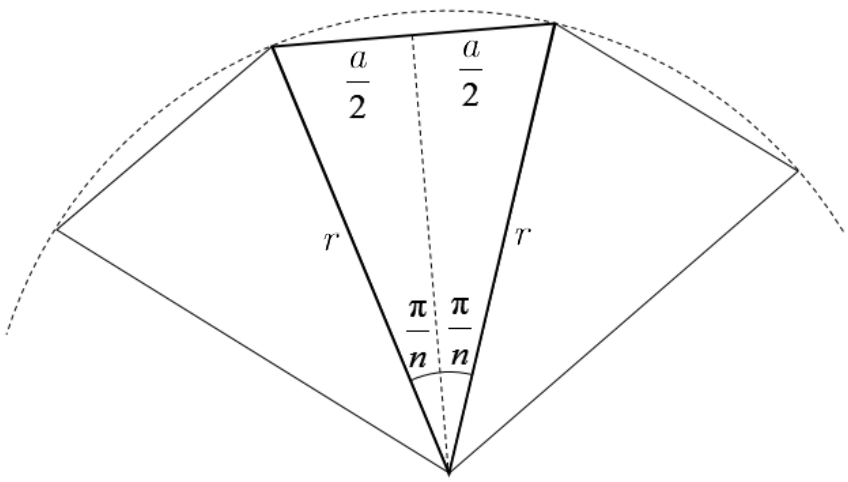
$$J_{o4} = \frac{1}{18} m \left(c^2 + 2a^2\right) + m \left(\frac{2}{3} b\right)^2 = \frac{1}{18} m \left(c^2 + 2a^2 + 8b^2\right) =$$

$$= \frac{1}{18} m \left(c^2 + 2c^2 \sin^2\alpha + 8c^2 \cos^2\alpha\right) = \frac{1}{18} mc^2 \left(1 + 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha + 6\cos^2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{18} mc^2 \left(3 + 6\cos^2\alpha\right) = \frac{1}{6} mc^2 \left(1 + 2\cos^2\alpha\right).$$

Pravidelný n-úhelník se skládá z n shodných rovnoramenných trojúhelníků s vrcholovým úhlem $2\alpha = 2\pi/n$, kde 2π je plný úhel v radiánech. Označme $r = c$ poloměr kružnice opsané. Odpovídající deska o hmotnosti m má moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení procházející jejím těžištěm

$$J_n = \frac{1}{6} mr^2 \left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right). \tag{4}$$



Volbou např. $n = 3$, 4, 6 dostaneme momenty setrvačnosti desek tvaru rovnostranného trojúhelníku, čtverce a pravidelného šestiúhelníku

$$J_3 = \frac{1}{6} mr^2 \left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} mr^2 = \frac{1}{4} m \left(\frac{a}{2\sin 60^\circ}\right)^2 = \frac{1}{12} ma^2,$$

$$J_4 = \frac{1}{6} mr^2 \left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} mr^2 = \frac{1}{3} m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 = \frac{1}{6} ma^2,$$

$$J_6 = \frac{1}{6} mr^2 \left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{12} mr^2 = \frac{5}{12} ma^2.$$

Výsledky souhlasí se vztahy (2), (1) a (3).

Volbou větších hodnot n ve vztahu (4) se bude úhel α zmenšovat a jeho kosinus zvětšovat. Pro velmi velká n je pak úhel α blízký nule, jeho kosinus blízký jedničce a pravidelný n-úhelník se bude svým tvarem blížit kruhu. Myšlenkový proces vyjádříme matematicky: V limitě pro n jdoucí k nekonečnu dostáváme

$$J_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} mr^2 \left(1 + 2\cos^2 \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} mr^2.$$

Výsledný výraz vyjadřuje moment setrvačnosti kruhové desky o hmotnosti m a o poloměru r vzhledem k ose procházející kolmo středem desky.

Úloha 1: Moment setrvačnosti desky tvaru pravidelného n-úhelníku lze vyjádřit vztahem $J_n = k_n mr^2$. Najděte pomocí Excelu minimální číslo n, pro které se koeficient k_n liší od koeficientu $k_\infty = 1/2$ pro kruhovou desku o méně než 1 %. Využijte vztah (4).

Dosud jsme vyjadřovali momenty setrvačnosti desek se zanedbatelnou tloušťkou. Pokud tloušťka není zanedbatelná, dostáváme v případě kruhové podstavy válec, v ostatních uvažovaných případech hranol. Moment setrvačnosti vzhledem k téže ose na výšce tělesa nezávisí a má stejný číselný koeficient k, neboť způsob rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení se zachová.

Určit moment setrvačnosti dalších těles zpravidla znamená užít integrální počet, jako ukázku uvedeme odvození pro kruhovou desku. Jde o ukázku, kterou může čtenář neseznámený s integrálním počtem vynechat.

Kruhová deska má hmotnost m a poloměr R. Rozdělíme ji na nekonečně mnoho prstenců o elementární šířce $\mathrm{d}r$ a elementární hmotnosti $\mathrm{d}m$. Vybereme jeden z prstenců o poloměru r, jeho moment setrvačnosti je

$$\mathrm{d}J = r^2 \cdot \mathrm{d}m. \tag{5}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}r$ a $\mathrm{d}m$. Z důvodu homogenity má deska všude stejnou plošnou hustotu σ. To znamená, že poměr celkové hmotnosti m a celkového plošného obsahu πr^2 je stejný jako poměr hmotnosti a plošného obsahu libovolného výřezu.

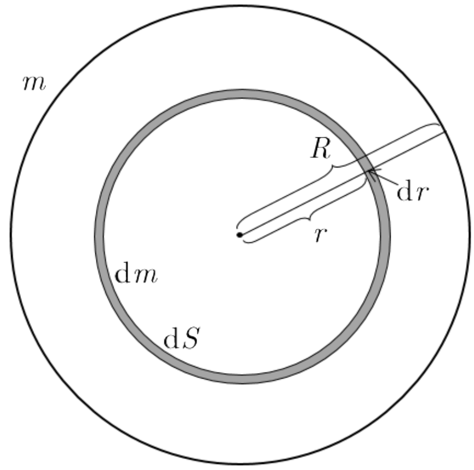
V našem případě použijeme poměr elementární hmotnosti $\mathrm{d}m$ a elementárního obsahu $\mathrm{d}S = 2\pi r \cdot \mathrm{d}r$ vybraného prstence. Proto platí

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2} = \frac{\mathrm{d}m}{2\pi r \cdot \mathrm{d}r}$$

Z rovnosti plyne

$$\mathrm{d}m = \frac{2r}{R^2} m \cdot \mathrm{d}r.$$

Dosazením do vztahu (5) nahradíme elementární hmotnost elementární tloušťkou prstence:



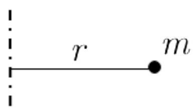
$$\mathrm{d}J = r^2 \cdot \frac{2r}{R^2} m \cdot \mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2} r^3 \mathrm{d}r.$$

Výraz představuje elementární moment setrvačnosti prstence o poloměru r a elementární tloušťky dr. Nyní elementární momenty setrvačnosti všech nekonečně mnoha prstenců s poloměry $r \in \langle 0; R\rangle$ sečteme a dostaneme celkový moment setrvačnosti kruhové desky. Tento součet nekonečně mnoha nekonečně malých hodnot se provádí matematickou metodou zvanou integrace. Proces spočívá v tom, že k dané funkci (v našem případě r^3) nalezneme tzv. primitivní funkci ($r^4/4$), jejíž funkční hodnoty pro horní integrační mez $r = R$ a dolní integrační mez $r = 0$ odečteme. Postup řešení zapisujeme takto:

$$J = \int_0^R \frac{2m}{R^2} r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2m}{R^2}\left(\frac{R^4}{4} - 0\right) = \frac{1}{2} mR^2.$$

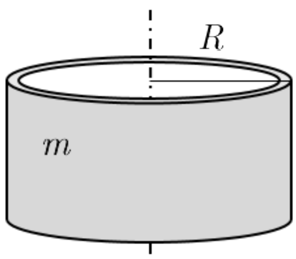
13. Momenty setrvačnosti konkrétních těles

V přehledu jsou uvedeny momenty setrvačnosti některých těles (u většiny jsme dokázali vztah odvodit):



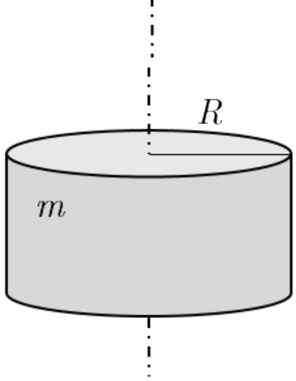
hmotný bod o hmotnosti m ve vzdálenosti r od osy otáčení:

$$J = mr^2$$



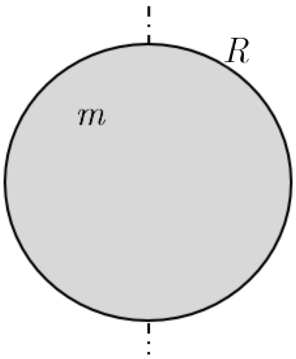
tenkostěnný válec, obruč, prstenec o hmotnosti m a o poloměru R (veškerá hmota je ve stejné vzdálenosti od osy otáčení jako u hmotného bodu)

$$J = mR^2$$



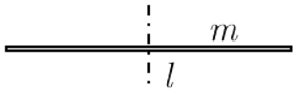
plný homogenní válec, kruhová deska, o hmotnosti m a o poloměru R

$$J = \frac{1}{2} mR^2$$



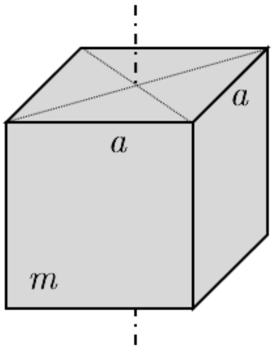
plná homogenní koule o hmotnosti m a o poloměru R

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$



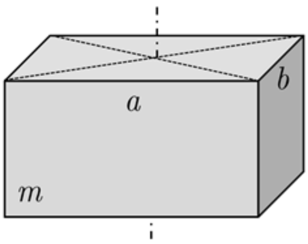
homogenní tyč o hmotnosti m a o délce l

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$



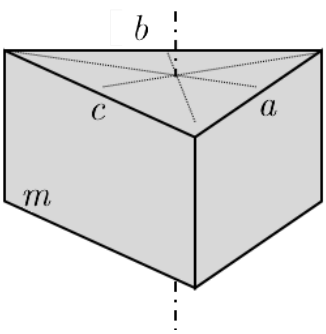
čtvercová deska, krychle, hranol (kvádr se čtvercovou podstavou)

$$J_0 = \frac{1}{6} m a^2$$



obdélníková deska, kvádr

$$J_0 = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2\right)$$

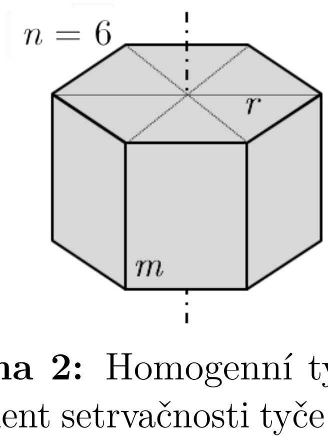


deska tvaru obecného trojúhelníku, odpovídající trojboký hranol

$$J_0 = \frac{1}{36} m \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

deska tvaru rovnostranného trojúhelníku, odpovídající trojboký hranol

$$J_0 = \frac{1}{12} m a^2$$



deska tvaru pravidelného n-úhelníku, odpovídající n-boký hranol

$$J_n = \frac{1}{6} m r^2 \left(1 + 2\cos^2 \frac{\pi}{n}\right)$$

Úloha 2: Homogenní tyč a malá kulička mají stejnou hmotnost. Již víme, že moment setrvačnosti tyče délky l a hmotnosti m vzhledem k ose otáčení procházející koncovým bodem tyče a kolmé k tyči je $J = \frac{1}{3}ml^2$.

Určete vzdálenost d od osy otáčení, kam musíme kuličku umístit, aby tyč i kulička měly stejný moment setrvačnosti.

Nejprve se pokuste odhadem porovnat tuto vzdálenost se vzdáleností $l/2$ těžiště tyče od osy otáčení.

Úloha 3: V pevné krabici tvaru krychle o vnitřním rozměru $a = 10{,}0$ cm je umístěn natěsno homogenní válec z oceli. Hustota oceli je $\rho = 7\ 850\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Určete moment setrvačnosti válce vzhledem k ose procházející středy podstav válce.

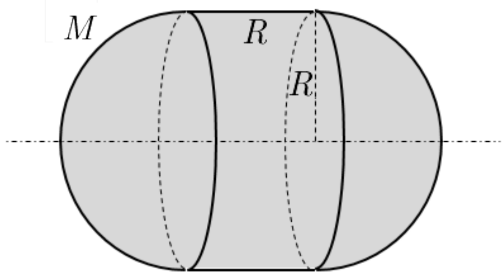
Úloha 4: Určete moment setrvačnosti prázdné tenkostěnné krychle o hmotnosti m s délkou hrany a vzhledem k ose procházející středy dvou protilehlých stěn.

Úloha 5: Máme dva plné homogenní válce. První válec má stejný průměr i výšku, druhý má průměr poloviční a výšku trojnásobnou než první válec.

Určete poměr hmotností a poměr momentů setrvačnosti prvního a druhého válce.

14. Složené těleso

Homogenní rotační těleso o hmotnosti M se skládá z plného válce o poloměru R a stejné výšky R a ze dvou plných polokoulí o stejném poloměru R. Vyjádřete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k podélné ose ve tvaru $J = kMR^2$.



Určíme poměr hmotnosti m_v válce a hmotnosti m_k polokoulí:

$$\frac{m_v}{m_k} = \frac{\rho\cdot\pi R^2\cdot R}{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}.$$

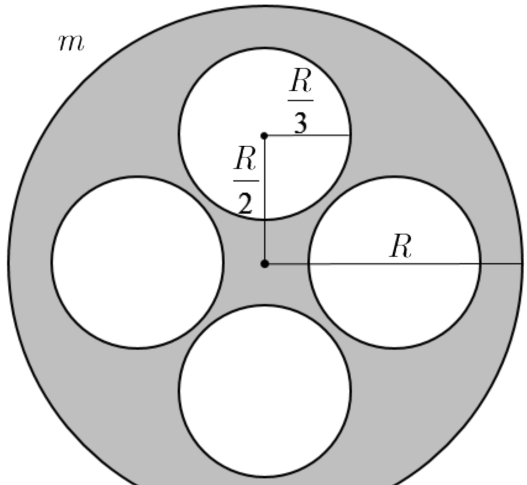
Jednotlivé hmotnosti jsou $m_v = \frac{3}{7}M$ a $m_k = \frac{4}{7}M$. Moment setrvačnosti tělesa je součtem momentů setrvačnosti jeho částí:

$$J = J_v + J_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}M\cdot R^2 + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7}M\cdot R^2 = \frac{31}{70}MR^2 \doteq 0{,}443MR^2.$$

Koeficient $k = \frac{31}{70}$ splňuje očekávaný výsledek $\frac{2}{5} < k < \frac{1}{2}$.

15. Kruhová deska s otvory

Homogenní kruhová deska o poloměru R má vyříznuté čtyři kruhové otvory o poloměrech $R/3$. Středy otvorů jsou ve vzdálenosti $R/2$ od středu desky. Hmotnost desky s otvory je m. Vyjádříme moment setrvačnosti desky vzhledem k ose kolmé k desce a procházející jejím středem.



Obsah původní kruhové desky je $S = \pi R^2$. Každý ze čtyř otvorů má obsah

$$S_1 = \pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\pi R^2 = \frac{1}{9}S.$$

Obsah kruhové desky se 4 otvory tak tvoří 5/9 obsahu desky bez vyříznutých otvorů, tím také hmotnost m desky s otvory tvoří 5/9 hmotnosti M desky bez otvorů, tedy $m = (5/9)M$. Hmotnost desky bez otvorů pak je $M = (9/5)m$.

Vyříznutá kruhová deska má moment setrvačnosti vzhledem k původní ose:

$$J_1 = \frac{1}{2}\frac{M}{9}\left(\frac{R}{3}\right)^2 + \frac{M}{9}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{11}{324}MR^2.$$

Moment setrvačnosti kruhové desky s otvory pak je

$$J = \frac{1}{2}MR^2 - 4 \cdot \frac{11}{324}MR^2 = \frac{59}{162}MR^2 = \frac{59}{162} \cdot \frac{9}{5}m \cdot R^2 = \frac{59}{90}mR^2 \doteq 0{,}656 mR^2.$$

16. Kolotoč

Určíme moment setrvačnosti kolotoče, víme-li, že hmotnost konstrukční trubky délky 1,00 m je $m = 6{,}0$ kg a hmotnost sedačky $m_s = 4{,}0$ kg. Z úvodu již víme, že spojnice ramen jsou ve vzdálenosti $r_1 = 2{,}0$ m a sedačka ve vzdálenosti $r_2 = 3{,}0$ m od osy otáčení.

Kolotoč si rozdělíme na ramena, spojnice ramen a sedačky. U ramen a jejich spojnic zanedbáme tloušťku, sedačky považujeme za hmotné body. (Ve skutečnosti pod rameny budou ještě vzpěry, aby se ramena neprohýbala. Ve výpočtu je však nebudeme uvažovat.)

Moment setrvačnosti jedné dvojice protilehlých ramen je

$$J_1 = \frac{1}{12} \cdot 6m \cdot (2r_2)^2 = 2mr_2^2.$$

Moment setrvačnosti jedné spojnice s využitím Steinerovy věty je

$$J_2 = \frac{1}{12} \cdot 2m \cdot r_1^2 + 2m \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_1\right)^2 = \frac{5}{3} m r_1^2.$$

Moment setrvačnosti jedné sedačky je

$$J_3 = m_s r_2^2.$$

Moment setrvačnosti kolotoče pak je

$$J = 3J_1 + 6J_2 + 6J_3 = 6mr_2^2 + 10mr_1^2 + 6m_s r_2^2 = (324 + 240 + 216)\ \mathrm{kg \cdot m^2} = 780\ \mathrm{kg \cdot m^2}.$$

V úvodu se tento kolotoč otáčel s úhlovou rychlostí $\omega = \sqrt{1{,}5}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Při této úhlové rychlosti má neobsazený kolotoč kinetickou energii

$$E_{k0} = \frac{1}{2} J\omega^2 = 585\ \mathrm{J}.$$

Je-li obsazený Pavlínou a Matějem podle úvodu, pak má kinetickou energii

$$E_k' = E_{k0} + E_k = 585\ \mathrm{J} + 450\ \mathrm{J} = 1\,035\ \mathrm{J}.$$

Úloha 6: Plný homogenní válec o hmotnosti M a o poloměru R je tvořen dvěma souosými válci, vnější válec je dutý a v něm se natěsno nalézá vnitřní plný válec. Oba mají stejný moment setrvačnosti vzhledem ke své geometrické ose.

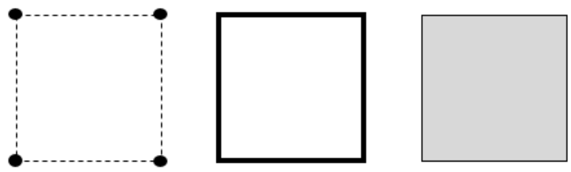
Určete poloměr r a hmotnost m vnitřního plného válce.

Úloha 7: Tenkostěnná otevřená nádoba tvaru válce má hmotnost m, poloměr R a výšku $3R$. Určete její moment setrvačnosti vzhledem ke geometrické ose.

Úloha 8: Triangl o hmotnosti m má tvar rovnostranného trojúhelníku s délkou strany a. Je vyroben z ocelové kulatiny se zanedbatelnou tloušťkou. Určete moment setrvačnosti trianglu vzhledem k ose procházející jedním z jeho vrcholů a kolmé k rovině trianglu.

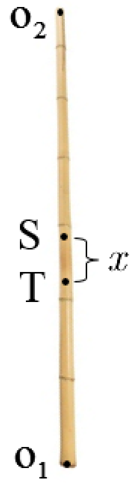
Úloha 9: Určete momenty setrvačnosti tří rovinných těles vzhledem ke kolmé ose procházející těžištěm a postupný poměr $J_1 : J_2 : J_3$ jejich momentů setrvačnosti:

1) čtyři malé kuličky umístěné ve vrcholech čtverce s délkou strany a,
2) čtyři tenké tyčky délky a spojené do obvodu čtverce,
3) čtvercová deska s délkou strany a.



Hmotnost každého tělesa je m.

17. Bambusový prut



Rovný bambusový prut délky l a hmotnosti m má těžiště T ve vzdálenosti x od svého středu S. Moment setrvačnosti prutu vzhledem k ose o_1 kolmé k prutu procházející jeho koncovým bodem bližším k těžišti je J_1.
Určíme moment setrvačnosti J_2 vzhledem k ose o_2 rovnoběžně posunuté do opačného koncového bodu prutu.
Výsledek porovnáme s homogenní tyčí.
Posuneme-li rovnoběžně osu otáčení tak, aby procházela těžištěm, pak podle Steinerovy věty platí

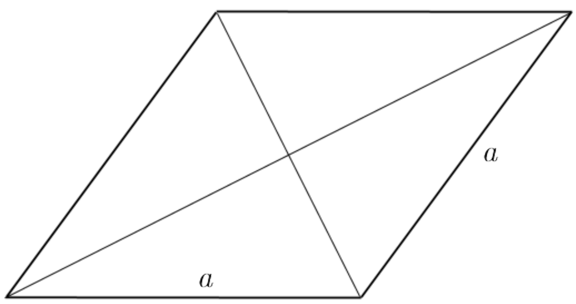
$$J_0 = J_1 - m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2.$$

Dalším posunutím do opačného koncového bodu prutu dostaneme S

$$J_2 = J_0 + m\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 = J_1 - m\left(\frac{l}{2} - x\right)^2 + m\left(\frac{l}{2} + x\right)^2 = J_1 + 2mlx.$$

Homogenní tyč má těžiště ve svém středu, proto $x = 0$, což dává očekávaný výsledek $J_2 = J_1$.

18. Kosočtvercová deska



Deska tvaru kosočtverce s délkou hrany a a hmotnosti m má délky úhlopříček v poměru 2:1. Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose kolmé k desce procházející vrcholem delší úhlopříčky je J_1.
Určíme moment setrvačnosti J_2 vzhledem k ose rovnoběžně posunuté do vrcholu kratší úhlopříčky.
Označme d polovinu kratší úhlopříčky, pak polovina delší úhlopříčky je $2d$. Posuneme-li rovnoběžně osu otáčení tak, aby procházela těžištěm, pak podle Steinerovy věty platí

$$J_0 = J_1 - m(2d)^2 = J_1 - 4md^2.$$

Dalším posunutím do vrcholu kratší úhlopříčky dostaneme

$$J_2 = J_0 + md^2 = J_1 - 4md^2 + md^2 = J_1 - 3md^2.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$a^2 = d^2 + (2d)^2 = 5d^2,$$

neboli

$$d^2 = \frac{a^2}{5}.$$

Dosazením dostaneme

$$J_2 = J_1 - 3md^2 = J_1 - \frac{3}{5}ma^2.$$

19. Fyzikální analogie

V popisu posuvného pohybu a otáčivého pohybu můžeme najít jistou podobnost, kterou nazýváme **fyzikální analogie**. Spočívá ve vytváření dvojic fyzikálních veličin, které si vzájemně odpovídají a které lze matematicky vyjádřit obdobnými vztahy.

Např. dráze s posuvného pohybu odpovídá úhel φ otáčivého pohybu. Časové změně dráhy, tj. rychlosti v, u posuvného pohybu odpovídá u otáčivého pohybu časová změna opsaného úhlu, tj. úhlová rychlost ω. Již v úvodu jsme poznali, že setrvačnost u posuvného pohybu vyjadřuje hmotnost m, setrvačnost u otáčivého pohybu vyjadřuje moment setrvačnosti J. Dvojice veličin a vztahů můžeme uspořádat do tabulky:

Posuvný pohyb	**Rotační pohyb**
dráha $s, \quad [s] = \mathrm{m}$	úhel otočení $\varphi, \quad [\varphi] = \mathrm{rad}$
rychlost $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad [v] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$	úhlová rychlost $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad [\omega] = \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$
zrychlení (tečné) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad [a] = \mathrm{m \cdot s^{-2}}$	úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}, \quad [\varepsilon] = \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$
rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený posuvný pohyb $v = v_0 \pm at$ $s = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$	rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený rotační pohyb $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\varepsilon t^2$
hmotnost $m, \quad [m] = \mathrm{kg}$	moment setrvačnosti $J = k \cdot mr^2, \quad [J] = \mathrm{kg \cdot m^2}$
síla F, $[F] = \mathrm{N}$ $F = ma$ (2. pohybový zákon)	moment síly $M = Fd$, $[M] = \mathrm{N \cdot m}$ $M = J\varepsilon$ (2. impulzová věta)

Posuvný pohyb	**Rotační pohyb**
hybnost $p, \quad [p] = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$ $p = mv$	moment hybnosti $L = pd, \quad [L] = \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$ $L = J\omega$
práce $W = Fs, \quad [W] = \mathrm{J}$	práce $W = M\varphi, \quad [W] = \mathrm{J}$
kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad [E_k] = \mathrm{J}$	kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2, \quad [E_k] = \mathrm{J}$
výkon $P = Fv, \quad [P] = \mathrm{W}$	výkon $P = M\omega, \quad [P] = \mathrm{W}$

Definiční či odvozené vztahy většinou nejsou uvedeny v obecné podobě, neboť účelem tabulky je pouze přehledné porovnání odpovídajících si veličin ve fyzikální analogii mezi posuvným a rotačním pohybem.

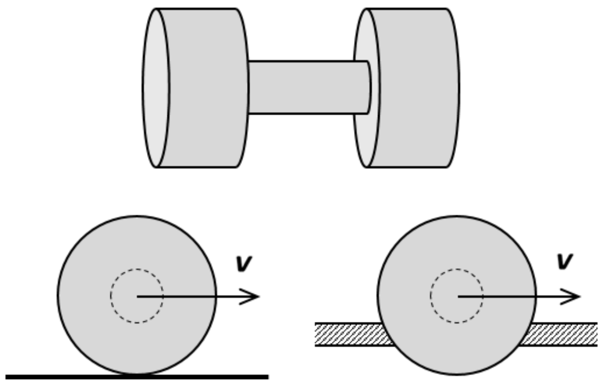
20. Činka

Činka o hmotnosti m se skládá ze dvou shodných železných válců o poloměru r spojených dutou hliníkovou trubkou o poloměru $r/3$ a o zanedbatelné hmotnosti. Činka se valí bez prokluzování rychlostí o velikosti v

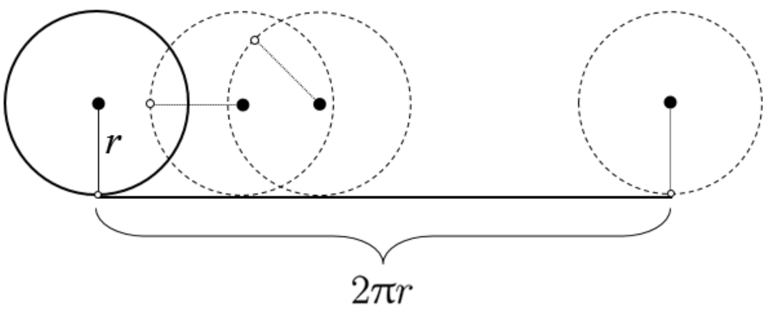
a) po vodorovné rovině

b) spojnicí po vodorovné úzké desce.

Určíme kinetickou energii činky.



Uvažujme nejprve rotační válec o poloměru r, který se valí po podložce bez prokluzování. Během jedné otočky kolem osy každý bod na plášti válce oběhne kružnici o poloměru r, čímž urazí dráhu $2\pi r$. Současně se osa válce posune o stejnou vzdálenost $2\pi r$. Při stejné dráze za stejný čas se proto musí rovnat obvodová rychlost bodů na plášti vzhledem k ose otáčení rychlosti posuvného pohybu válce vzhledem k podložce.



Vztah mezi rychlostí v posuvného pohybu válce a úhlovou rychlostí rotace válce

$$v = r\omega$$

nazýváme **vazbová podmínka**.

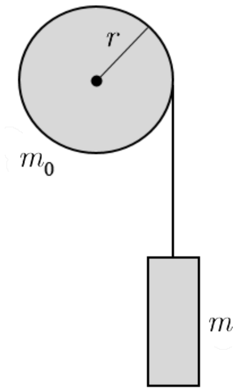
V případě valení činky vyjadřují vazbovou podmínku pro jednotlivé případy vztahy a) $v = r\omega$, b) $v = \frac{r}{3}\omega$.

Kinetická energie valící se činky je rovna součtu kinetické energie posuvného pohybu a kinetické energie rotačního pohybu kolem osy procházející těžištěm činky:

$$\text{a)}\ E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2,$$

$$\text{b)}\ E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{v}{\frac{r}{3}}\right)^2 = \frac{11}{4}mv^2.$$

21. Roztáčení válce



Na plném homogenním válci, který se může otáček kolem pevné vodorovné osy, je navinuto lanko, na jehož konci visí závaží o hmotnosti m. Válec má hmotnost m_0 a poloměr r. Po uvolnění se lanko začne bez prokluzování odvíjet. Určíme velikost a zrychlení závaží. Tření v ložisku kladky zanedbáme.

Provedeme dva způsoby řešení. Nejprve užijeme *zákon zachování mechanické energie.*

Při poklesu závaží do hloubky h soustava získá kinetickou energii, která je rovna úbytku potenciální energie závaží:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh.$$

V každém okamžiku je rychlost klesání závaží rovna obvodové rychlosti bodů na plášti válce, proto platí vazbová podmínka

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Dosazením vazbové podmínky a momentu setrvačnosti válce dostaneme

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_0r^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = mgh,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}m_0v^2 = mgh,$$

$$v = \sqrt{\frac{4m}{2m+m_0}gh}.$$

Příčinou pohybu je stálá tíhová síla závaží, proto posuvný pohyb závaží i otáčivý pohyb válce je rovnoměrně zrychlený. Zrychlení závaží získáme z kinematických rovnic vyloučením času:

$$v = at, \quad h = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{v^2}{2h}.$$

Dosazením za rychlost nakonec dostaneme

$$a = \frac{\dfrac{4m}{2m + m_0}gh}{2h} = \frac{2m}{2m + m_0}g.$$

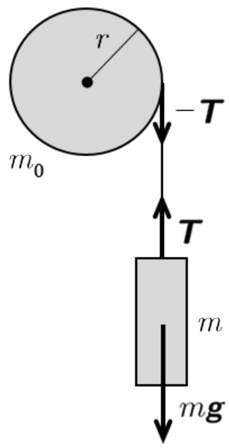
Zrychlení závisí pouze na hmotnostech těles. Ještě vyhodnotíme některé zvláštní případy:

Je-li $m = m_0$, pak $a = \frac{2}{3}g$.

Je-li hmotnost závaží zanedbatelná vzhledem k hmotnosti válce, tj. $m \ll m_0$, pak se zrychlení bude blížit k nule.

Je-li hmotnost válce zanedbatelná vzhledem k hmotnosti závaží, tj. $m_0 \ll m$, pak se zrychlení bude blížit k zrychlení volného pádu.

Jiný způsob řešení spočívá v užití *pohybových rovnic.*
Na závaží působí svisle dolů tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ a v opačném směru nahoru tahová síla $\boldsymbol{T}$ lanka. Jejich výslednice způsobuje posuvný rovnoměrně zrychlený pohyb závaží se zrychlením $\boldsymbol{a}$.
Na válec působí lanko v opačném směru dolů stejně velkou silou $-\boldsymbol{T}$. Její moment způsobuje rovnoměrně zrychlený rotační pohyb válce s úhlovým zrychlením ε.
Každý pohybový účinek vyjádříme pohybovou rovnicí:



$$mg - T = ma,$$
$$Tr = J\varepsilon.$$

V soustavě dvou pohybových rovnic máme tři neznámé: a, ε, T. Jelikož lanko neprokluzuje, je velikost zrychlení závaží shodná s velikostí tečného zrychlení bodů na plášti válce, tedy mezi neznámými a, ε platí vazbová podmínka

$$a = \varepsilon r.$$

Ze soustavy pohybových rovnic vyloučíme sílu T:

$$mg = ma + \frac{J\varepsilon}{r}.$$

Dosazením momentu setrvačnosti válce a vazbové podmínky postupně dostaneme

$$mg = ma + \frac{\frac{1}{2}m_0 r^2 \cdot \frac{a}{r}}{r},$$

$$mg = ma + \frac{1}{2}m_0 a,$$
$$a = \frac{2mg}{2m + m_0}.$$

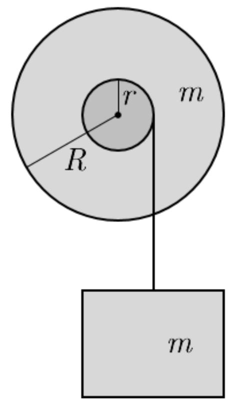
Pro úplnost lze vyjádřit úhlové zrychlení válce a tahovou sílu

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{2m}{(2m + m_0)\,r}g,$$
$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2m}{2m + m_0}g\right) = \frac{m_0}{m_0 + 2m}mg.$$

Úloha 10: Plný homogenní válec o hmotnosti m a poloměru R je na společné ose spojen s kladkou o poloměru r a zanedbatelné hmotnosti. Přes kladku je vedeno lanko, na jehož konci visí závaží o stejné hmotnosti m.

a) Určete velikost a zrychlení závaží.

b) Určete velikost a' zrychlení závaží pro $r = R/4$.



22. Třecí síla

Na vodorovné podložce leží kvádr o hmotnosti m. Na kvádr působí v jeho těžišti tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a podložka ve stykové ploše dolní podstavy stejně velkou silou $\boldsymbol{N}$ opačného směru. Síly se ruší, tudíž jejich výslednice je nulová a kvádr zůstává v klidu.

Nyní budeme na kvádr působit postupně rostoucí silou $\boldsymbol{F}$ ve vodorovném směru. Zpočátku kvádr opět zůstává v klidu, což vysvětlíme vyvolanou statickou třecí silou $\boldsymbol{F}_{\text{stat}} = -\boldsymbol{F}$ stejné velikosti a opačného směru, kterou působí na kvádr podložka. V jednom okamžiku se kvádr odtrhne, tehdy je působící síla $\boldsymbol{F}$ na kvádr v klidu maximální a velikost statické třecí síly bránící pohybu kvádru lze vyjádřit $F_{\text{stat, max}} = f_s N$.

Číselnou konstantu f_s nazveme **statický součinitel smykového tření**.

Tedy do okamžiku odtržení platí

$$F = F_{\text{stat}} \leq f_s N.$$

Poté při následném vlečení kvádru nastavíme tahovou sílu $\boldsymbol{F}$ tak, aby jeho pohyb byl rovnoměrný. Pak dynamická třecí síla $\boldsymbol{F}_{\text{dyn}}$ je v rovnováze s tahovou silou $\boldsymbol{F}$ a jejich výslednice je nulová. Velikost dynamické třecí síly působící proti pohybu lze vyjádřit jako $F_{\text{dyn}} = f_d N$.

Číselnou konstantu f_d nazveme **dynamický součinitel smykového tření**. Obvykle bývá dynamický součinitel poněkud menší než statický.

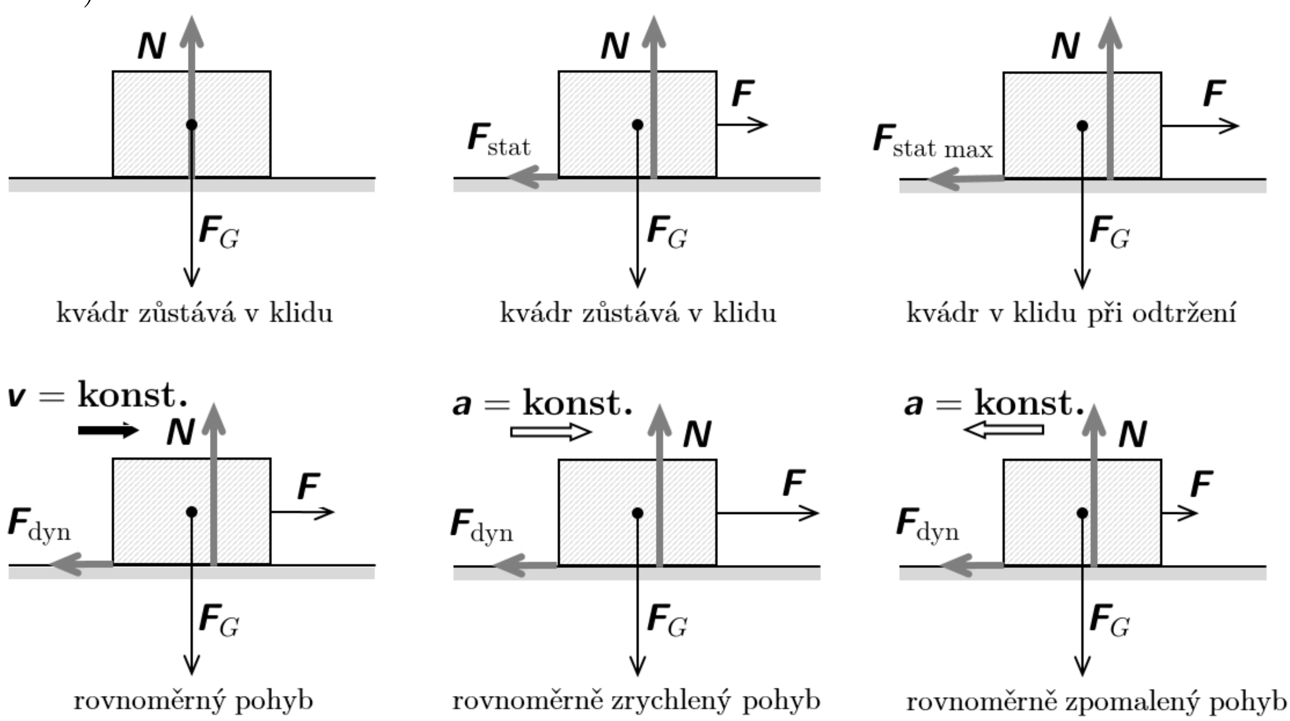
Pokud tahovou sílu zvětšíme, třecí síla se nezmění a pohyb kvádru bude zrychlený se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F - F_{\text{dyn}}}{m}.$$

Pokud tahovou sílu zmenšíme, třecí síla se opět nezmění a pohyb kvádru bude zpomalený se zrychlením o velikosti

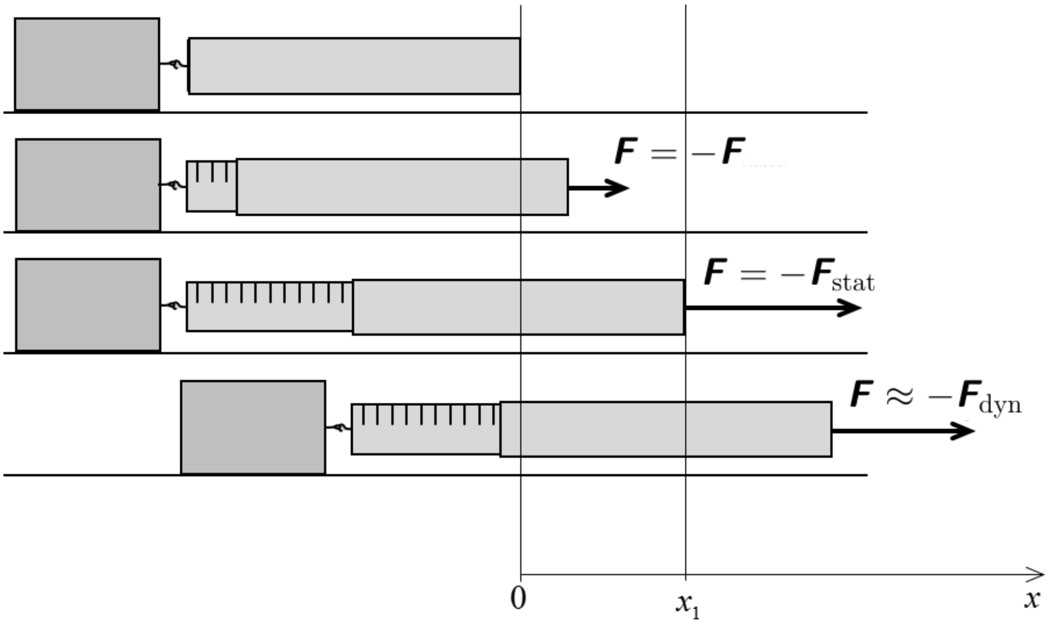
$$a = \frac{F_{\text{dyn}} - F}{m}.$$

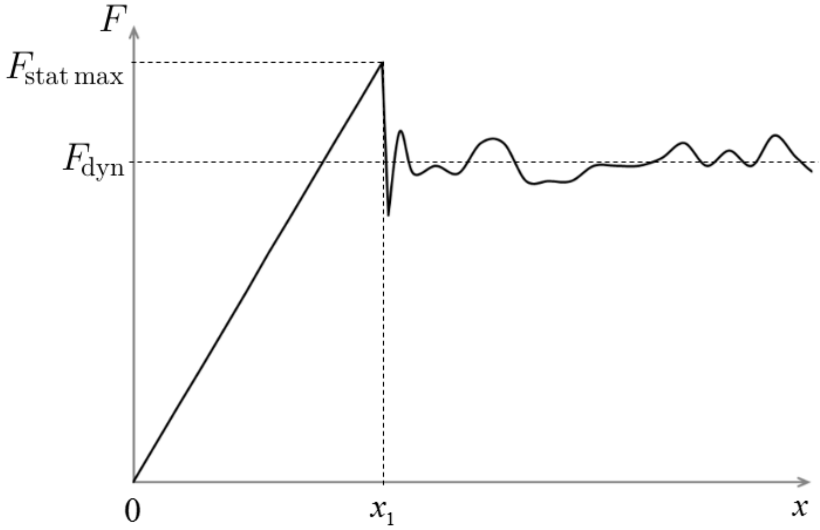
Popsané situace jsou znázorněny v obrázku. Jelikož tahová a třecí síla nemají společnou vektorovou přímku, je též vektorová přímka reakce $\boldsymbol{N}$ podložky posunutá tak, aby výsledný moment všech působících sil zůstal nulový (podmínka nulové rotace).



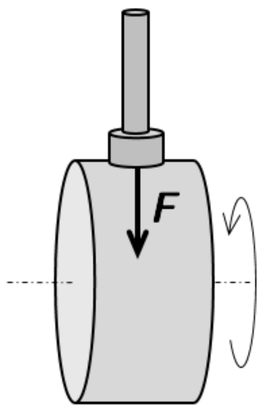
Další obrázek znázorňuje měření třecí síly siloměrem. V počáteční poloze siloměru určené souřadnicí $x = 0$ tahová síla nepůsobí. Nyní siloměr táhneme tak, aby jeho pohyb byl rovnoměrný. Tahová síla je v rovnováze se statickou třecí silou a postupně roste až do okamžiku, kdy siloměr dosáhne polohy $x = x_1$. Poté se těleso odtrhne a proti jeho pohybu začne působit dynamická třecí síla, která je obvykle poněkud menší než maximum statické třecí síly. Po krátkodobém překmitnutí zůstává dynamická třecí síla přibližně konstantní.

Popsanou funkční závislost velikosti F tahové síly na poloze siloměru určené souřadnicí x lze znázornit graficky:





23. Brzdění rotujícího válce



Homogenní plný válec o hmotnosti $m = 7{,}0$ kg a poloměru $r =$ $= 6{,}0$ cm se otáčí kolem pevné osy stálou úhlovou rychlostí $\omega_0 = 50\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Přitlačením brzdícího prvku stálou silou kolmo na plášť válce začne válec zpomalovat tak, že do zastavení vykoná $N = 40$ otáček. Dynamický součinitel smykového tření mezi pláštěm válce a brzdícím prvkem je $f = 0,25$.
Určíme velikost F přítlačné síly.
Velikost momentu třecí síly je

$$M = F_t r = fFr.$$

Třecí síla vykoná práci, která je rovna celému úbytku kinetické energie válce

$$W = M\varphi = \frac{1}{2}J\omega_0^2,$$

kde $\varphi = N \cdot 2\pi$ je celkový úhel otočení. Po dosazení dostaneme

$$fFr \cdot 2\pi N = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mr^2 \cdot \omega_0^2.$$

Z rovnice plyne

$$F = \frac{mr\omega_0^2}{8\pi N f} = \frac{7 \cdot 0,06 \cdot 50^2}{8\pi \cdot 40 \cdot 0,25}\ \mathrm{N} = 4{,}2\ \mathrm{N}.$$

Alternativně můžeme vyjít z kinematických rovnic

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2, \quad \omega_0 = \varepsilon t$$

rotačního pohybu do úplného zastavení. Z rovnic užitím vztahu $\varphi = N \cdot 2\pi$ plyne

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{2\varphi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi N}$$

Z druhé věty impulzové $M = J\varepsilon$ (obdoba druhého Newtonova pohybového zákona $F = ma$ pro posuvný pohyb) dostaneme

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{fFr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2fF}{mr}.$$

Ze vztahu plyne

$$F = \frac{mr}{2f}\varepsilon.$$

Dosazením za úhlové zrychlení dostaneme

$$F = \frac{mr}{2f}\frac{\omega_0^2}{4\pi N} = \frac{mr\omega_0^2}{8\pi N f}.$$

Místo kinematických rovnic rotačního pohybu můžeme též využít kinematické rovnice posuvného pohybu. Každý bod pláště se na počátku pohybuje po kružnici s počáteční rychlostí o velikosti $v_0 = r\omega_0$, přičemž během brzdění za dobu t urazí dráhu $s = N \cdot 2\pi r$ podle kinematických rovnic

$$s = \frac{1}{2}at^2, \quad \omega_0 = \varepsilon t.$$

Z rovnic plyne

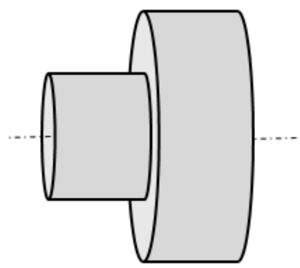
$$a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{r^2\omega_0^2}{2 \cdot 2\pi r N} = \frac{r\omega_0^2}{4\pi N}.$$

Úhlové zrychlení válce pak je

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{\omega_0^2}{4\pi N}.$$

Další postup přes druhou větu impulzovou zůstává stejný.

Úloha 11: Setrvačník se skládá ze dvou plných homogenních válců o stejných výškách a o poloměrech $r = 9{,}0$ cm a $2r$. Celková hmotnost tělesa je $m = 120$ kg. Setrvačník se otáčí kolem pevné osy s konstantní periodou $T = 0{,}60$ s. Přitlačením brzdícího prvku stálou silou o velikosti $F = 15$ N kolmo na plášť jednoho z válců začne těleso zpomalovat, až se zcela zastaví. Dynamický součinitel smykového tření mezi pláštěm válce a brzdícím prvkem je $f = 0{,}20$.



a) Určete moment setrvačnosti J tělesa.

b) Určete dobu t_1 brzdění při působení dané síly na menší válec a dobu t_2 brzdění při působení dané síly na větší válec.

24. Hozená koule

Plné homogenní kouli udělíme počáteční rychlost v_0 bez rotace po vodorovné podlaze.

a) Určíme konečnou rychlost v koule po skončení prokluzování.

b) Určíme poměr úbytku kinetické energie vlivem tření a původní kinetické energie koule.

a) Ve vodorovném směru působí na kouli pouze třecí síla, která zpomaluje posuvný pohyb a svým momentem urychluje rotaci. Oba účinky síly vyjádříme pohybovými rovnicemi:

$$F_t = ma,$$
$$F_t r = J\varepsilon.$$

Vyloučením třecí síly a po dosazení za moment setrvačnosti dostaneme:

$$a = \frac{J\varepsilon}{mr} = \frac{\frac{2}{5}mr^2 \cdot \varepsilon}{mr} = \frac{2\varepsilon r}{5}.$$

Z časových rovnic rovnoměrně zpomaleného posuvného pohybu a rovnoměrně zrychleného rotačního pohybu vyloučením času dostaneme

$$v = v_0 - at, \quad \omega = \varepsilon t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 - \frac{a\omega}{\varepsilon}.$$

S rostoucí úhlovou rychlostí ω rotačního pohybu koule lineárně klesá její rychlost v posuvného pohybu až do okamžiku splnění vazbové podmínky $\omega = \frac{v}{r}$ pro neprokluzování. Dosazením zrychlení a této vazbové podmínky dostaneme

$$v = v_0 - \frac{\frac{2\varepsilon r}{5} \cdot \frac{v}{r}}{\varepsilon} = v_0 - \frac{2}{5}v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{5}{7}v_0.$$

b) Kinetická energie koule po dosažení konečné rychlosti v je

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2 = \frac{7}{10}m\left(\frac{5}{7}v_0\right)^2 = \frac{5}{14}mv_0^2.$$

Výsledek dosadíme do hledaného poměru:

$$\frac{\Delta E_k}{E_{k0}} = \frac{E_{k0} - E_k}{E_{k0}} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{5}{14}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{2}{7}.$$

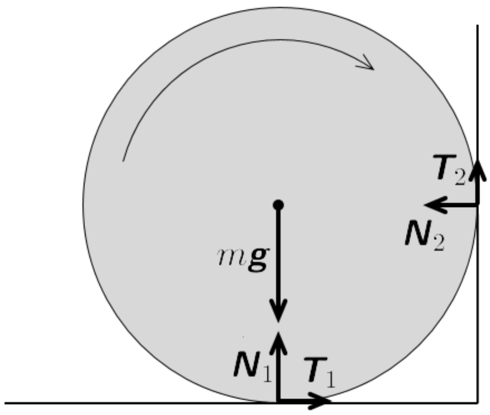
25. Koule brzdící o stěnu

Koule o hmotnosti m a o poloměru $r = 5{,}0$ cm se valí bez prokluzování po vodorovné rovině rychlostí o velikosti $v = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a narazí kolmo do svislé stěny. Bez odrazu začne prokluzovat a vlivem tření se zastaví. Dynamický součinitel smykového tření mezi koulí a podlahou i mezi koulí a svislou stěnou je $f = 0{,}25$. Tíhové zrychlení je $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Pomocí tíhové síly vyjádříme velikost všech tečných a normálových sil působících na kouli.

b) Určíme dobu zastavování a počet otáček do zastavení.

a) Na kouli působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$, vodorovná rovina normálovou silou $\boldsymbol{N}_1$ a brzdící tečnou silou $\boldsymbol{T}_1$, svislá stěna normálovou silou $\boldsymbol{N}_2$ a brzdící tečnou silou $\boldsymbol{T}_2$.



Z hlediska posuvného pohybu zůstává koule v klidu, proto výslednice všech sil působících na kouli je nulová:

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Pro velikosti sil ve vodorovném a ve svislém směru tak dostaneme:

$$T_1 = N_2,$$
$$N_1 + T_2 = mg.$$

Tečné síly jsou vyvolány třením

$$T_1 = fN_1,$$
$$T_2 = fN_2.$$

Z této soustavy čtyř rovnic dostaneme

$$N_1 = \frac{mg}{1+f^2} = \frac{16}{17}mg,$$

$$N_2 = \frac{fmg}{1+f^2} = \frac{4}{17}mg,$$

$$T_1 = \frac{fmg}{1+f^2} = \frac{4}{17}mg,$$

$$T_2 = \frac{f^2mg}{1+f^2} = \frac{1}{17}mg.$$

b) Pohybová rovnice pro rovnoměrně zpomalený rotační pohyb je

$$Mr = J\varepsilon,$$

kde M je velikost momentu brzdících sil. Do rovnice postupně dosazujeme a vyjádříme úhlové zrychlení ε:

$$T_1r + T_2r = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \varepsilon,$$

$$T_1 + T_2 = \frac{2}{5}mr\varepsilon,$$

$$\frac{fmg}{1+f^2} + \frac{f^2mg}{1+f^2} = \frac{2}{5}mr\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{5f(1+f)g}{2\,(1+f^2)\,r}.$$

Rovnoměrně zpomalený pohyb do zastavení je popsán rovnicemi

$$\omega = \varepsilon t, \quad \varphi = 2\pi n = \frac{1}{2}\varepsilon t^2,$$

kde $\omega = \frac{v}{r}$ je počáteční úhlová rychlost otáčení koule, t je celková doba brzdění, φ úhel otočení a n počet otáček během brzdění. Ze soustavy rovnic plyne

$$t = \frac{2\,(1+f^2)}{5f(1+f)}\frac{v}{g} = \frac{34}{25}\frac{v}{g} = 0{,}28 \text{ s},$$

$$n = \frac{1+f^2}{10\pi f(1+f)}\frac{v^2}{gr} = 0{,}88.$$

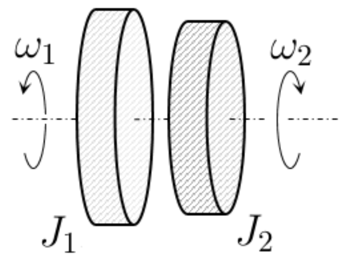
Místo rovnic pro rotační pohyb koule lze použít rovnice pro otáčivý pohyb bodů na dotykové kružnici:

$$v = at, \quad s = n \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}at^2,$$

kde $a = \varepsilon r$ je tečné zrychlení bodů na dotykové kružnici.

26. Dva souosé disky

Dva disky tvaru válce s momenty setrvačnosti $J_1 = 5{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ a $J_2 = 3{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ jsou umístěny na společné ose a otáčejí se protisměrně s úhlovými rychlostmi o velikostech $\omega_1 = 20\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a $\omega_2 = 60\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Po přitlačení k sobě se vzájemně třou do okamžiku, kdy rotují jako jedno těleso.



a) Určíme konečnou úhlovou rychlost spojených disků.

b) Určíme, jaká část původní kinetické energie se ve formě kinetické energie po spojení do jednoho tělesa zachovala.

Úloha je analogická úloze na dokonale nepružný ráz těles při přímočarém pohybu. Konkrétně jde např. o srážku dvou vagónů jedoucích proti sobě; podrobný rozbor této úlohy je uveden ve studijním textu [2], s. 6 – 9.

Moment hybnosti i úhlová rychlost jsou vektorové veličiny a podobně jako moment síly mají dva navzájem opačné směry určené osou otáčení. Moment hybnosti $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$ má stejný směr jako úhlová rychlost $\boldsymbol{\omega}$ stejně jako v analogii hybnost $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ má stejný směr jako rychlost $\boldsymbol{v}$ (v obou případech jde o součin nezáporné hodnoty skaláru s vektorem). To nám umožní do rovnic zabudovat i směr otáčení.

a) Označme postupně ω_{z1}, ω_{z2}, ω_z souřadnice vektorů $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\omega}$. Při volbě kladného směru otáčení prvního disku pak je $\omega_{z1} = 20\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $\omega_{z2} = -60\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

Zákon zachování momentu hybnosti má tvar

$$J_1\omega_{z1} + J_2\omega_{z2} = (J_1 + J_2)\,\omega_z.$$

Z rovnice plyne

$$\omega_z = \frac{J_1\omega_{z1} + J_2\omega_{z2}}{J_1 + J_2} = \frac{5 \cdot 20 + 3 \cdot (-60)}{5 + 3}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = -10\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}.$$

Těleso spojených disků má úhlovou rychlost o velikosti $10\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ a otáčí se ve stejném smyslu jako druhý disk před spojením.

b) Kinetická energie jako skalární veličina nezávisí na směru, proto si vystačíme s velikostí úhlové rychlosti.

Kinetická energie soustavy před spojením disků je

$$E_k = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2,$$

kinetická energie tělesa po spojení

$$E_k' = \frac{1}{2}\,(J_1 + J_2)\,\omega^2.$$

Vyjádříme poměr energií, do něhož za ω ($\omega^2 = \omega_z^2$) dosadíme výsledek a):

$$\frac{E_k'}{E_k} = \frac{\frac{1}{2}\left(J_1 + J_2\right)\omega^2}{\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2} = \frac{J_1 + J_2}{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2} \cdot \frac{\left(J_1\omega_{z1} + J_2\omega_{z2}\right)^2}{\left(J_1 + J_2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(J_1\omega_{z1} + J_2\omega_{z2}\right)^2}{\left(J_1 + J_2\right)\left(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2\right)} = \frac{\left(5 \cdot 20 + 3 \cdot (-60)\right)^2}{(5+3)\left(5 \cdot 20^2 + 3 \cdot 60^2\right)} = \frac{1}{16}.$$

V průběhu děje se 1/16 původní kinetické energie disků zachovala ve formě kinetické energie, zatímco 15/16 původní kinetické energie se přeměnilo na vnitřní energii, tj. zvětšila se teplota disků v oblasti třecích ploch.

Úloha 12: Řešte příklad v případě shodného směru rotace disků.

Úloha 13: Dva disky tvaru válce s momenty setrvačnosti $J_1 = 10{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ a $J_2 = 4{,}5\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ jsou umístěny na společné svislé ose bez vzájemného dotyku. Spodní disk se otáčí s frekvencí $f_1 = 12{,}0\ \mathrm{Hz}$. Horní disk je v klidu, po uvolnění dosedne na spodní a vlivem tření se uvede do pohybu.

a) Určete konečnou frekvenci otáčení soustavy spojených disků.

b) Určete, jaká část původní kinetické energie se vlivem tření přeměnila na vnitřní energii.

27. Koule na nakloněné rovině

Plnou homogenní kouli o hmotnosti m a s poloměrem r položíme na nakloněnou rovinu se sklonem α.

a) Určíme zrychlení koule při pohybu bez prokluzu.

b) Najdeme vztah mezi součinitelem f smykového tření a úhlem sklonu α, při němž se koule bude valit bez prokluzu.

c) Určíme zrychlení koule při pohybu s prokluzem.

d) Určíme v případech a) a c) velikosti všech sil působících na kouli.

a) Zrychlení nalezneme dvěma způsoby, nejprve užitím *zákona zachování mechanické energie*. Koule valící se okamžitou rychlostí v bez prokluzování má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Zvolíme dráhový úsek délky s nakloněné roviny, na němž koule přejde z klidu z jedné polohy do druhé s výškovým rozdílem $h = s\sin\alpha$. Z rovnosti kinetické energie E_k koule v konečné poloze a potenciální energie $E_p = mgh$ v počáteční poloze dostaneme velikost konečné rychlosti:

$$\frac{7}{10}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = \sqrt{\frac{10}{7}gs\sin\alpha}.$$

Při stálém sklonu zůstávají pohybové síly konstantní, proto je pohyb koule rovnoměrně zrychlený. Jeho zrychlení dostaneme z kinematických rovnic vyloučením času:

$$v = at, \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s}.$$

Zrychlení získáme dosazením již známé rychlosti

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\frac{10}{7}gs\sin\alpha}{2s} = \frac{5}{7}g\sin\alpha.$$

Jiný způsob nalezení zrychlení je pomocí *pohybových rovnic.* Koule koná současně dva pohyby:

1. Posuvný rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením a ve směru nakloněné roviny šikmo dolů. Jeho příčinou je výslednice sil působících na kouli ve směru nakloněné roviny.
2. Rotační rovnoměrně zrychlený pohyb s úhlovým zrychlením ε kolem vodorovné osy kolmé k nákresně a procházejí těžištěm koule. Jeho příčinou je výslednice momentů sil působících na kouli.

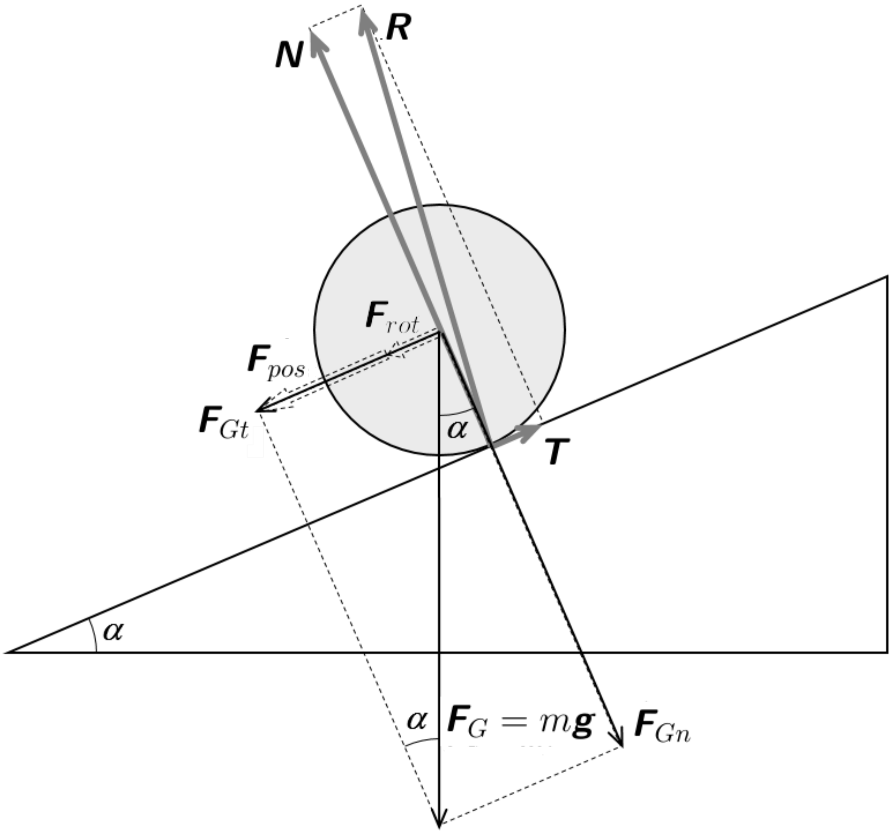
Na kouli působí v jejím těžišti tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a v dotykovém bodě reakce $\boldsymbol{R}$ nakloněné roviny. Tíhová síla má tečnou složku $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Gt}}$ a normálovou složku $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Gn}}$, reakce má tečnou složku $\boldsymbol{T}$ a normálovou složku $\boldsymbol{N}$.

Koule se evidentně pohybuje po nakloněné rovině, to znamená, že normálové složky se vzájemně ruší:

$$N = F_{\mathrm{Gn}} = mg\cos\alpha.$$

Posuvný pohyb koule je způsoben výslednicí tečných složek o velikostech $F_{\mathrm{Gt}} = mg\sin\alpha$ a T. Tím dostáváme první pohybovou rovnici

$$mg\sin\alpha - T = ma. \tag{6}$$



Rotační pohyb vyvolá pouze moment tečné složky $\boldsymbol{T}$ reakce s ramenem r, neboť zbývající momenty složek $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Gt}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Gn}}$ mají nulové rameno. Druhá pohybová rovnice pak je

$$Tr = J\varepsilon. \tag{7}$$

Jelikož koule neprokluzuje, je splněna vazbová podmínka

$$a = \varepsilon r. \tag{8}$$

Vazbová podmínka vyjadřuje, že při neprokluzování se velikosti zrychlení posuvného pohybu koule a tečného zrychlení dotykových bodů koule rotačního pohybu rovnají (podobně se v každém okamžiku rovnají velikosti okamžité rychlosti posuvného pohybu koule a obvodové rychlosti dotykových bodů rotačního pohybu).

Dosazením vazbové podmínky (8) a momentu setrvačnosti koule do pohybové rovnice (7) dostaneme

$$Tr = \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{5}ma.$$

Konečná soustava dvou pohybových rovnic (6) a (7)

$$mg\sin\alpha - T = ma, \quad T = \frac{2}{5}ma$$

obsahuje právě dvě neznámé a, T a má řešení

$$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha,$$

$$T = \frac{2}{7} mg \sin\alpha. \tag{9}$$

Pro úplnost doplníme úhlové zrychlení

$$\varepsilon = \frac{a}{r} = \frac{5g\sin\alpha}{7r}.$$

b) Při valení bez prokluzu se uplatňuje statická třecí síla, při valení s prokluzem dynamická třecí síla. Pro jednoduchost nebudeme rozlišovat hodnoty statického a dynamického součinitele smykového tření.

Při neprokluzování je tečná složka $\boldsymbol{T}$ reakce statickou třecí silou, pro kterou platí

$$T \leq fN = fmg\cos\alpha.$$

Užitím vztahu (9) dostaneme

$$\frac{2}{7} mg\sin\alpha \leq fmg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{2\sin\alpha}{7\cos\alpha} = \frac{2}{7}\mathrm{tg}\,\alpha.$$

c) Při prokluzu již neplatí vazbová podmínka a tečná složka T zůstává rovna dynamické třecí síle $F_t = fmg\cos\alpha$. Napíšeme pohybové rovnice:

$$mg\sin\alpha - F_t = ma, \quad F_t r = J\varepsilon.$$

Jednou neznámou je opět zrychlení a, roli druhé neznámé nyní přebírá úhlové zrychlení ε. Po dosazení třecí síly a momentu setrvačnosti koule po úpravě dostaneme pro každou neznámou samostatnou rovnici

$$g\sin\alpha - fg\cos\alpha = a, \quad fg\cos\alpha = \frac{2}{5} r\varepsilon.$$

Řešením je

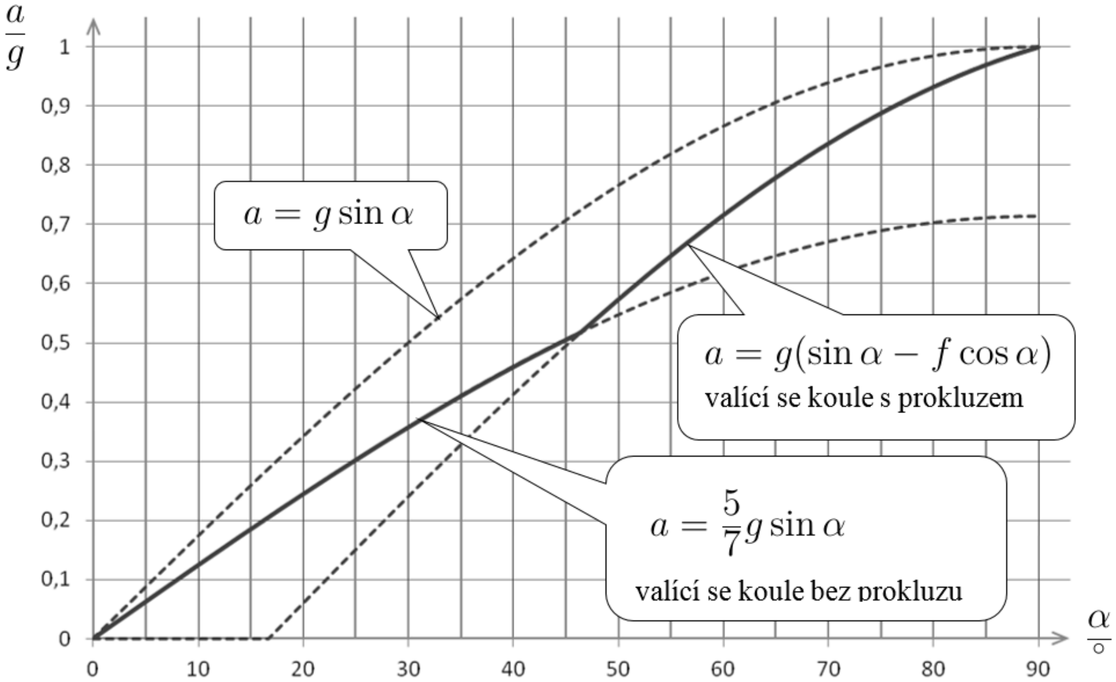
$$a = g\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right), \quad \varepsilon = \frac{5fg\cos\alpha}{2r}.$$

d)

Pohyb koule bez prokluzu $f \geq \frac{2}{7}\mathrm{tg}\,\alpha$	Pohyb koule s prokluzem $f < \frac{2}{7}\mathrm{tg}\,\alpha$
$F_{\mathrm{Gt}} = F_{\mathrm{pos}} + F_{\mathrm{rot}} = mg\sin\alpha$	$F_{\mathrm{Gt}} = F_{\mathrm{pos}} + F_{\mathrm{rot}} = mg\sin\alpha$
$F_{\mathrm{pos}} = ma = \frac{5}{7} mg\sin\alpha$	$F_{\mathrm{pos}} = ma = mg\left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right)$
$F_{\mathrm{rot}} = T = \frac{2}{5} ma = \frac{2}{7} mg\sin\alpha$	$F_{\mathrm{rot}} = T = fmg\cos\alpha$
$F_{\mathrm{Gn}} = N = mg\cos\alpha$	$F_{\mathrm{Gn}} = N = mg\cos\alpha$
$R = \sqrt{T^2 + N^2} =$	$R = \sqrt{T^2 + N^2} =$
$= mg\sqrt{\frac{4}{49}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} < mg$	$= mg\sqrt{1 + f^2}\cos\alpha < mg$

V obr. jsou doplněny pohybová síla $\boldsymbol{F}_{\text{pos}}$ posuvného pohybu a pohybová síla $\boldsymbol{F}_{\text{rot}}$ rotačního pohybu (síly $\boldsymbol{F}_{\text{rot}}$ a $\boldsymbol{T}$ působící na kouli vlastně tvoří dvojici sil).

Funkční závislost zrychlení a pohybu koule na úhlu α sklonu nakloněné roviny znázorníme graficky (zvolen součinitel smykového tření $f = 0,30$):



Při nulovém tření každé těleso (včetně rotačních) se pouze smýká se zrychlením $a = g \sin \alpha$.

Při nenulovém tření je zrychlení rotačního tělesa bez prokluzu v nějakém násobku, např. koule v násobku 5/7 (pro velké úhly si neprokluzující rotační těleso lze představit jako ozubené na ozubené nakloněné rovině).

Kvádr se při nenulovém tření buď nerozjede, nebo se smýká se zrychlením $a = g\,(\sin \alpha - f \cos \alpha)$. Např. pro součinitel $f = 0,30$ nastane předěl při úhlu $\alpha = 17°$.

Plná čára kopírující části čárkovaných grafů zobrazuje zrychlení koule při tomtéž součiniteli $f = 0,30$. Při menších úhlech se bude valit bez prokluzu, při větších bude navíc prokluzovat, předěl nastává pro úhel $\alpha = 46°$.

Úloha 14: Určete zrychlení, s jakým se bude pohybovat plný homogenní válec po nakloněné rovině se sklonem a) $\alpha = 20°$, b) $\alpha = 40°$. Součinitel smykového tření mezi povrchy válce a nakloněné roviny je $f = 0{,}20$.

28. Pirueta a člověk na rotujícím disku

Představme si bruslaře, jak provádí piruetu. Obvykle se nájezdem na místo piruety uvede do počátečního rotačního pohybu s roztaženými pažemi a vytrčenou nohou. Označme J_0 počáteční moment setrvačnosti a ω_0 počáteční úhlovou rychlost bruslaře. Přitažením končetin k ose otáčení se moment setrvačnosti zmenší na hodnotu J a úhlová rychlost se zvětší na hodnotu ω. Přitom ke změně tvaru těla dojde pouze vlivem vlastních sil bruslaře. Vliv vnějších sil jako je odpor vzduchu či tření mezi bruslí a ledem zanedbáme. Bruslař tak tvoří izolovanou soustavu, která splňuje zákon zachování momentu hybnosti. Proto platí

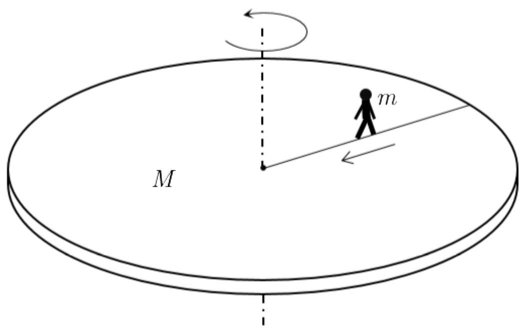
$$J\omega = J_0\omega_0.$$

Porovnejme nyní kinetickou energii $E_{k0} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2$ v počátečním stavu a kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ v konečném stavu. Bude stejná, nebo nebude stejná? Vyjádříme rozdíl konečné a počáteční kinetické energie:

$$\Delta E_k = E_k - E_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}J \cdot \left(\frac{J_0}{J}\omega_0\right)^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \left(\frac{J_0}{J} - 1\right)\frac{1}{2}J_0\omega_0^2.$$

Jelikož $J < J_0$, výraz v závorce je kladný, kinetická energie se zvětšila. Přirozeně vzniká otázka, jaký je původ tohoto přírůstku energie.

Budeme zkoumat jednodušší model. Na obvodu velké kruhové vodorovné desky o hmotnosti M a o poloměru R stojí člověk jako hmotný bod o hmotnosti m. Tato soustava dvou těles se otáčí kolem svislé osy desky procházející jejím středem úhlovou rychlostí ω_0. Člověk nyní přejde přímočaře vzhledem k desce z okraje desky do jejího středu.



Soustava je izolovaná, neboť silové působení probíhá pouze mezi člověkem a deskou. Podle zákona zachování momentu hybnosti opět platí

$$J\omega = J_0\omega_0,$$

po dosazení momentů setrvačnosti soustavy dostaneme

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0.$$

Z rovnice plyne

$$\omega = \frac{M + 2m}{M}\omega_0.$$

Počáteční kinetická energie je

$$E_{k0} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right) \cdot \omega_0^2 = \frac{M + 2m}{4}R^2\omega_0^2.$$

Konečná kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot \left(\frac{M + 2m}{M}\omega_0\right)^2 = \frac{(M + 2m)^2}{4M}R^2\omega_0^2.$$

Jejich rozdíl je

$$\Delta E_k = E_k - E_{k0} = \frac{(M+2m)^2}{4M}R^2\omega_0^2 - \frac{M+2m}{4}R^2\omega_0^2 =$$
$$= \frac{M^2+4Mm+4m^2-M^2-2Mm}{4M}R^2\omega_0^2 = \frac{M+2m}{2M}\cdot mR^2\omega_0^2>0. \quad (10)$$

Kladná hodnota rozdílu opět svědčí o zvětšení kinetické energie soustavy.

Člověk při radiálním pohybu k ose otáčení musí překonávat setrvačnou odstředivou sílu, čímž koná práci. Při rovnoměrném otáčení desky by tato síla byla přímo úměrná okamžité vzdálenosti r od osy otáčení podle vztahu

$$F = mr\omega^2,$$

avšak s každým posunutím člověka se změní i úhlová rychlost otáčení soustavy. Funkční závislost úhlové rychlosti ω na vzdálenosti r člověka od osy dostaneme ze zákona zachování momentu hybnosti

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0.$$

Z rovnice plyne

$$\omega = \frac{(M+2m)R^2}{MR^2+2mr^2}\omega_0.$$

Hledaná funkční závislost síly F na vzdálenosti r pak je

$$F = mr\omega^2 = mr\cdot\left[\frac{(M+2m)R^2}{MR^2+2mr^2}\omega_0\right]^2 = m(M+2m)^2R^4\omega_0^2\cdot\frac{r}{(MR^2+2mr^2)^2}.$$

Zkusíme určit práci této síly při posunutí tělesa o hmotnosti m ze středu disku k jeho okraji, je však nutno použít integrální počet (čtenář může vynechat). Při zvoleném směru rostoucí vzdálenosti r od osy otáčení platí:

$$W = \int_0^R F\mathrm{d}r = \int_0^R m(M+2m)^2R^4\omega_0^2\cdot\frac{r}{(MR^2+2mr^2)^2}\cdot\mathrm{d}r.$$

K integraci použijeme vztah $\int \frac{x}{(ax^2+b)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a\,(ax^2+b)}+C$, o jeho správnosti se lze přesvědčit zpětnou derivací.

$$W = \frac{m(M+2m)^2R^4\omega_0^2}{4m}\cdot\left[\frac{-1}{MR^2+2mr^2}\right]_0^R =$$
$$= \frac{(M+2m)^2R^4\omega_0^2}{4}\cdot\left(\frac{-1}{(2m+M)R^2} - \frac{-1}{MR^2}\right) = \frac{M+2m}{2M}mR^2\omega_0^2 > 0.$$

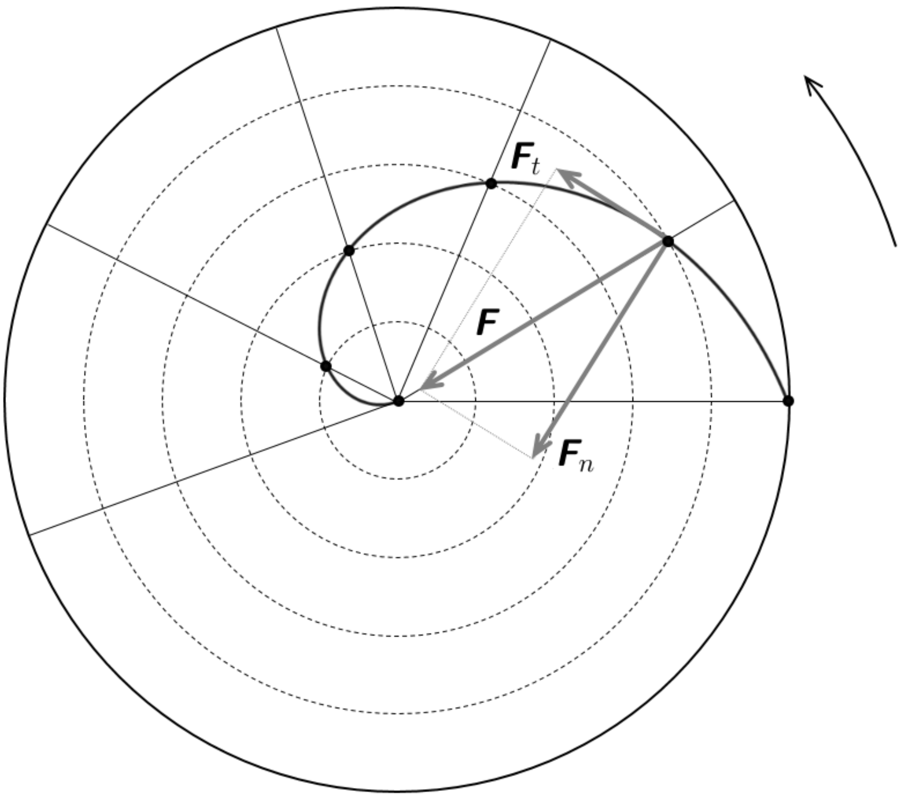
Při postupu člověka v opačném směru, tj. z okraje desky k ose, tuto práci koná člověk. Práce člověka je rovna přírůstku kinetické energie soustavy dané vztahem (10). Tím, že postupující člověk vstupuje do míst desky s menší obvodovou rychlostí, tím s odpovídajícím bočním náklonem nutí desku rotaci zrychlovat. Naopak při radiálním postupu od středu ve směru setrvačné odstředivé síly člověk práci spotřebovává (práci koná setrvačná odstředivá síla), vstupuje do míst s větší obvodovou rychlostí, čímž nutí desku rotaci zpomalovat.

Stejně tak při piruetě přitahováním končetin k ose otáčení se části končetin s danou obvodovou rychlostí dostávají blíže k ose, v rotaci trup předbíhají a tahem urychlují v rotaci. Bruslař tak přitahováním končetin práci koná a zvětšuje svoji kinetickou energii. Naopak uvolněním se končetiny odstředivou silou roztáhnou nadoraz, v rotaci zaostávají za trupem a zpomalují jej. Stejný úbytek kinetické energie se projeví jako přírůstek vnitřní energie.

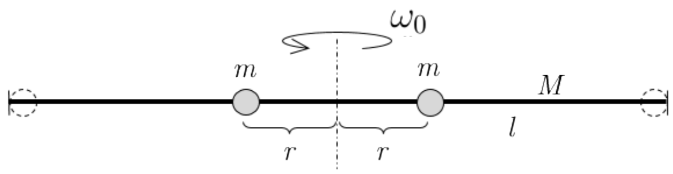
Na obr. je z hlediska vnějšího (inerciálního) pozorovatele znázorněna situace pro člověka o hmotnosti $m = M/3$, který se rovnoměrným pohybem přemisťuje radiálně po úsečce z kraje desky do středu tak, že za tuto dobu by se deska rovnoměrným otáčivým pohybem s úhlovou rychlostí ω_0 otočila o 2,50 rad (konečný úhel otočení je však 3,49 rad, neboť deska je během pohybu člověka urychlována).

Pohyb člověka vzhledem k inerciálnímu pozorovateli se skládá z jeho rovnoměrného přímočarého radiálního pohybu vzhledem k desce a z otáčivého pohybu kontaktního místa povrchu desky vzhledem k pozorovateli. Na výsledné křivočaré trajektorii jsou vyznačeny polohy člověka po každé pětině doby pohybu. Zvětšující se úhel otočení za každou pětinu této doby svědčí o urychlování rotace desky.

V čase jedna pětina doby pohybu je sestrojena okamžitá dostředivá síla, kterou deska působí na člověka. Její tečná složka člověka po trajektorii posunuje, čímž koná práci, zatímco normálová (kolmá) složka mění směr pohybu (zakřivuje trajektorii) a práci nekoná. Výpočet práce pomocí tečné složky síly po křivočaré trajektorii by zřejmě byl podstatně obtížnější, avšak vedl by ke stejnému výsledku jako provedený výpočet práce pomocí dostředivé síly posunující člověka radiálně z hlediska neinerciálního pozorovatele spojeného s deskou.



Úloha 15: Vodorovná homogenní tyč má hmotnost M a může se otáčet kolem pevné svislé osy procházející jejím těžištěm. Na tyči jsou souměrně k ose navlečeny dvě malé kuličky o zanedbatelném průměru, každá o hmotnosti m, a to ve vzdálenosti r od osy otáčení. Tyč s kuličkami se otáčí s počáteční úhlovou rychlostí ω_0. V jednom okamžiku dojde k uvolnění kuliček, čímž se každá přemístí k zarážce na konci tyče.



a) Určete úhlovou rychlost ω soustavy po přemístění kuliček.

b) Řešte úlohu a) pro $m = M/3$ a $r = l/6$.

c) Určete pro $m = M/3$ a $r = l/6$ poměr $\frac{\Delta U}{E_k}$ přírůstku vnitřní energie soustavy a její počáteční kinetické energie.

Úloha 16: Bruslař zahajuje piruetu s počátečním momentem setrvačnosti $J_0 = 2{,}7\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ a s počáteční periodou $T_0 = 0{,}80$ s. Přitažením končetin k ose rotace zmenší moment setrvačnosti na hodnotu $J = 0{,}85\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

a) Určete periodu T otáčení po přitažení končetin k ose rotace.

b) Určete práci W vykonanou bruslařem během změny periody otáčení.

Výsledky úloh

Úloha 1

$$k_n = \frac{J_n}{mr^2} = \frac{\frac{1}{6}mr^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{mr^2} = $$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n}\right),$$

$$n = 26$$

n	k	$\frac{0{,}5 - k}{0,5}$
3	0,25000	50,00 %
4	0,33333	33,33 %
5	0,38484	23,03 %
6	0,41667	16,67 %
7	0,43725	12,55 %
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
25	0,49476	1,05 %
26	0,49516	0,97 %
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Úloha 2

$$d = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}l \doteq 0{,}577\,l > \frac{l}{2}$$

Úloha 3

$$J = \frac{\pi\rho a^5}{32} \doteq 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

Úloha 4

$$J = 2 \cdot \frac{1}{6}\frac{m}{6}a^2 + 4 \cdot \left[\frac{1}{12}\frac{m}{6}a^2 + \frac{m}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{5}{18}ma^2$$

„Stlačením" ve směru osy otáčení dostaneme soustavu dvou podstavných čtvercových desek a čtyř „tyčí". Touto myšlenou úvahou se nezmění rozložení hmoty vzhledem k ose otáčení a pro moment setrvačnosti každé boční desky užijeme vztah pro moment setrvačnosti tyče.

Úloha 5

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot d}{\rho \cdot \pi\left(\frac{d}{4}\right)^2 \cdot 3d} = \frac{4}{3}, \quad \frac{J_1}{J_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_2\left(\frac{d}{4}\right)^2} = \frac{16}{3}$$

Úloha 6

$$\frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2 \quad\Rightarrow\quad \rho\pi r^2 h \cdot r^2 = \frac{1}{2}\cdot\rho\pi R^2 h \cdot R^2 \quad\Rightarrow\quad r = \frac{R}{\sqrt[4]{2}} \doteq 0{,}841R,$$

$$\frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2 \quad\Rightarrow\quad m \cdot \frac{R^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot M \cdot R^2 \quad\Rightarrow\quad m = \frac{\sqrt{2}}{2}M \doteq 0{,}707M.$$

Úloha 7

$$J = \frac{13}{14}mR^2$$

Úloha 8

$$J = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{m}{3}a^2 + \left[\frac{1}{12}\frac{m}{3}a^2 + \frac{m}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right] = \frac{1}{2}ma^2$$

Součet momentů setrvačnosti dvou tyčí spojených v ose otáčení a momentu protilehlé tyče s užitím Steinerovy věty.

Úloha 9

$$J_1 = 4 \cdot \frac{m}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2, \quad J_2 = 4 \cdot \left[\frac{1}{12}\frac{m}{4}a^2 + \frac{m}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{3}ma^2, \quad J_3 = \frac{1}{6}ma^2$$

$$J_1 : J_2 : J_3 = 3 : 2 : 1$$

Úloha 10

a) $a = \dfrac{2r^2}{2r^2 + R^2}g$,

b) $a' = \dfrac{1}{9}g$.

Úloha 11

a) $J = \dfrac{1}{2}\dfrac{m}{5}r^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{4m}{5}(2r)^2 = \dfrac{17}{10}mr^2 = \dfrac{17}{10} \cdot 120 \cdot 0{,}09^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 1{,}65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,

b) $t_1 = \dfrac{\omega}{\varepsilon} = \dfrac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{M}{J}} = 2\pi\dfrac{J}{MT} = 2\pi\dfrac{\frac{17}{10}mr^2}{fFrT} = \dfrac{17\pi mr}{5fFT} = \dfrac{17\pi \cdot 120 \cdot 0{,}09}{5 \cdot 0{,}2 \cdot 15 \cdot 0{,}6} \text{ s} = 64 \text{ s}$,

$$M = F \cdot 2r \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{17\pi mr}{10fFT} = \frac{t_1}{2} = 32 \text{ s}.$$

Úloha 12

a) $\omega = \dfrac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} = \dfrac{5 \cdot 20 + 3 \cdot 60}{5 + 3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

b) $\dfrac{E_k'}{E_k} = \dfrac{(J_1\omega_1 + J_2\omega_2)^2}{(J_1 + J_2)(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2)} = \dfrac{(5 \cdot 20 + 3 \cdot 60)^2}{(5 + 3)(5 \cdot 20^2 + 3 \cdot 60^2)} = \dfrac{49}{64} \doteq 0{,}77$.

Úloha 13

a) $f = \dfrac{J_1}{J_1 + J_2}f_1 = 8{,}4 \text{ Hz}$,

b) $\dfrac{\Delta E_k}{E_k} = \dfrac{E_k - E_k'}{E_k} = 1 - \dfrac{E_k'}{E_k} = \dfrac{J_2}{J_1 + J_2} = 0{,}30$.

Možno srovnat s analogickou úlohou dokonale nepružného nárazu jedoucího vagónu do stojícího ve studijním textu [2], s. 3 – 5.

Úloha 14

$$mg\sin\alpha - T = ma,\quad Tr = \frac{1}{2}mr^2\cdot\frac{a}{r}\quad\Rightarrow\quad T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha,\quad a = \frac{2}{3}g\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha_m = fmg\cos\alpha_m\quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\alpha_m = 3f\quad\Rightarrow\quad \alpha_m = 31^\circ$$

a) $\alpha < \alpha_m$, neprokluzuje, $a = \frac{2}{3}g\sin 20^\circ = 0{,}23g = 2{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

b) $\alpha > \alpha_m$, prokluzuje, $a = g\left(\sin 40^\circ - 0{,}2\cdot\cos 40^\circ\right) = 0{,}49g = 4{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Úloha 15

a) $\omega = \dfrac{\frac{1}{12}Ml^2 + 2mr^2}{\frac{1}{12}Ml^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2}\omega_0 = \dfrac{Ml^2 + 24mr^2}{Ml^2 + 6ml^2}\omega_0,$

b) $\omega = \dfrac{3ml^2 + 24m\left(\frac{l}{6}\right)^2}{3ml^2 + 6ml^2}\omega_0 = \dfrac{11}{27}\omega_0,$

c) $\dfrac{\Delta U}{E_k} = \dfrac{E_k - E_k'}{E_k} = 1 - \dfrac{E_k'}{E_k} = 1 - \dfrac{\frac{1}{2}J'\omega^2}{\frac{1}{2}J\omega_0^2} = 1 - \dfrac{J\frac{\omega_0}{\omega}\cdot\omega^2}{J\omega_0^2} = 1 - \dfrac{\omega}{\omega_0} = 1 - \dfrac{11}{27} = \dfrac{16}{27}.$

Úloha 16

a) $J\dfrac{2\pi}{T} = J_0\dfrac{2\pi}{T_0}\quad\Rightarrow\quad T = \dfrac{J}{J_0}T_0 \doteq 0{,}25\ \mathrm{s},$

b) $E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2 = \dfrac{1}{2}J\left(\dfrac{J_0}{J}\omega_0\right)^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{J_0^2}{J}\omega_0^2,$

$$W = E_k - E_{\mathrm{k}0} = \frac{1}{2}\frac{J_0^2}{J}\omega_0^2 - \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2\left(\frac{J_0}{J} - 1\right) = \frac{2\pi^2 J_0}{T_0^2}\left(\frac{J_0}{J} - 1\right) \doteq 180\ \mathrm{J}.$$

Literatura

[1] Bartsch, H. J.: Matematické vzorce. SNTL Praha, 1983.

[2] Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika. Část 1 Mechanika. VUT Brno, 2000.

[3] Jírů, J.: Hybnost a energie při vzájemném působení těles. Knihovnička FO č. 104. Hradec Králové, 2018.

[4] Prachař, J. – Trnka, J.: Úlohy z mechaniky II. Otáčení tuhého tělesa. Knihovnička FO č. 72. MAFY, Hradec Králové, 2006.

[5] Vybíral, B.: Mechanika rovinného pohybu tuhého tělesa. Knihovnička FO č. 65. MAFY, Hradec Králové, 2011.