Pohyb, síly a sportovní aktivity 1

Zimní sporty na sněhu a ledu

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf, Přemysl Šedivý

Obsah

Slovo úvodem

Před více než 160 lety dr. F. J. Smetana ve své učebnici fyziky, kterou vydal v roce 1852 pod názvem *Počátkové silozpytu čili fysiky pro gymnasia*, napsal: „...čím důkladněji poznáme síly přírodní a zákony činnosti jejich, tím lépe jich užívati můžeme jak ku prospěchu tělesnému, tak i k duševnímu vzdělání svému. Silozpyt (čti fyzika) nejlépe budí ostrovtip, brousí rozum a zapuzuje předsudky a pověry, které vzniku blaha lidského nejvíce překážejí.“

Fyzikální poznatky pomáhají pochopit a vysvětlit jevy a děje v dalších přírodovědných disciplínách. Mnoho lidí po celém světě miluje sport, nebo mu alespoň holdují jako fanouškové. Tělesná výchova (физкультура, Physical Culture, *Φυσικη Αγωγη* = Fisike Agogi, L' Education Physique ...) poskytuje však obrovské pole pro aplikaci fyzikálního poznání. Proto do programu studia učitelů tělesné výchovy a trenérů je zařazen předmět Biomechanika tělesných cvičení, kde se budoucí učitelé a trenéři seznamují s využitím fyzikálních zákonitostí pro pohyb sportovce či sportovního náčiní.

Úkolem tohoto textu je zabývat se pohybem, vlivem sil na pohyb sportovce či náčiní a ukázat na nebezpečí, která na sportovce číhají v době, kdy se věnují svým koníčkům a zálibám. Začneme se zimními sporty — sportováním na sněhu a ledu.

Řešení problémů z běžného života vyžaduje vždycky podrobnou analýzu sledované situace, která potom poskytne určitý zjednodušený popis a následně i použití jednoduchých fyzikálních zákonitostí. Když však situaci zjednodušíme příliš, získáme nevěrohodné řešení problému. Když na zjednodušení zapomeneme, dostaneme se do situace, kdy daný problém nejsme schopni vyřešit. Proto základem procesu řešení je výběr vhodného modelu, který popisuje situaci dostatečně přesně a současně odpovídá fyzikálním a matematickým vědomostem i dovednostem řešitele.

V textu se budeme převážně zabývat pohyby, při kterých na těleso působí nezanedbatelným způsobem odpor vzduchu a smykové tření. Analytické řešení pohybových rovnic těchto dějů obvykle překračuje rámec středoškolské matematiky. Na několika příkladech si ukážeme, jak můžeme takovéto pohyby jednoduše vyšetřit metodou numerického modelování.

1 Fyzikální východiska

Nejprve se dohodneme na označování fyzikálních veličin, které budeme používat při fyzikálním popisu sportovce nebo jeho náčiní, s nímž sport provozuje. Kromě toho si připomeneme některé základní fyzikální poznatky a vztahy, které použijeme při řešení sportovních problémových situací. Možná, že by bylo jednodušší odkázat čtenáře na platné učebnice a příručky [1], [2].

Je pochopitelné, že tak, jako to provádíme v celé fyzice, bude nutno reálné situace i jejich aktéry zjednodušovat, nebo alespoň o některých vlivech při řešení neuvažovat. Tak budeme sportovce někdy považovat za malé těleso, jehož rozměry nejsou pro řešení podstatné (např. běžec při maratonském běhu), jindy jako rozměrné těleso (sportovec, který klopýtl a padá k zemi či skokan do výšky). To vše podstatně ovlivní i volbu použitých údajů.

Poloha sportovce či náčiní může být určena polohou jeho těžiště, a to v závislosti na tom, zda je příslušný děj nebo jev popisován v trojrozměrném prostoru $(O; x, y, z; t)$, nebo zda stačí popis v rovině $(O; x, y; t)$, nebo sledujeme přemístění po přímce $(O; x; t)$. Každopádně je nutné využít popisu v prostoročase, zvolit počátek vztažné soustavy, zvolit příslušný počet prostorových souřadnic a souřadnici časovou.

U tělesa potom dále rozlišujeme hmotnost, hybnost, pohybovou či polohovou energii, moment setrvačnosti a jejich značky

$$m,\ \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v},\ E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2,\ E_\mathrm{p} = mgh,\ J = J_0 + ma^2,$$

kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a J moment setrvačnosti vzhledem k rovnoběžné ose ve vzdálenosti a.

V mnoha případech můžeme tedy nahradit skutečné těleso (sportovce či náčiní) tzv. hmotným bodem, u nějž lze stanovit jednoznačně polohu $(x, y, z; t)$ a popsat jeho pohyb.

Hmotný bod se může pohybovat po přímce stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, tedy pohybem rovnoměrným přímočarým. Přitom za dobu $\Delta t = t_2 - t_1$ urazí vzdálenost $\Delta x = x_2 - x_1$, kterou nazýváme dráhou pohybu $\Delta x = s$; potom platí $s = v \cdot \Delta t$; ve variantách vztahu lze stanovit velikost rychlosti pohybu $v = \dfrac{s}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ nebo dobu pohybu $\Delta t = \dfrac{s}{v}$.

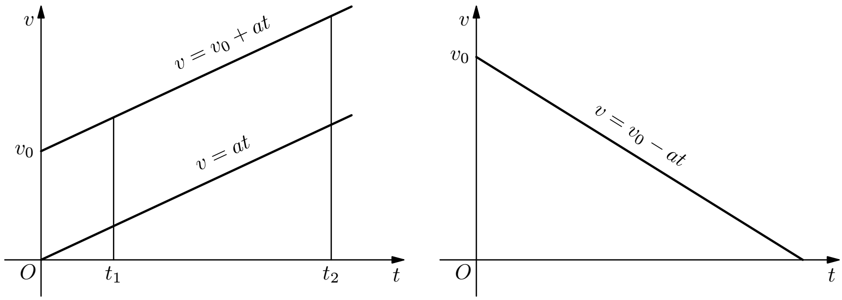
Pokud se během pohybu mění rychlost s časem, jde o pohyb zrychlený $(v_2 > v_1)$, nebo zpomalený $(v_2 < v_1)$. Z hlediska matematické jednoduchosti nás zajímá především rovnoměrně zrychlený pohyb se stálým zrychlením o velikosti a, potom pro dráhu a velikost rychlosti platí $s = \dfrac{1}{2}at^2$, $v = at$, nebo v případě nenulové počáteční rychlosti v_0

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2,\ \ v = v_0 + at.$$

Rovnoměrně zpomalený pohyb předpokládá počáteční rychlost o velikosti v_0 a vztahy pro dráhu a velikost rychlosti jsou opět jednoduché:

$$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2, \;\; v = v_0 - at,$$

kde a je velikost zrychlení (zpomalení). Velmi jednoduše si lze zapamatovat tyto poznatky na základě grafu $v(t)$:



Obsah plochy pod úsečkou $v(t)$ nám vyjadřuje dráhu, což je ve shodě s výše uvedenými vztahy. V případě rovnoměrně zpomaleného pohybu můžeme z grafu stanovit i dobu nutnou k zastavení (pro $v = 0$), tedy $t = \dfrac{v_0}{a}$.

Zajímavé je, že vztahy platí nejen pro přímočarý pohyb, ale i pro křivočarý rovnoměrně zrychlený, resp. zpomalený pohyb, např. po kružnici. V takovém případě musíme počítat s tečným zrychlením $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$. Dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{d}$ kolmé ke směru okamžité rychlosti, mění její směr, ale na její velikost nemá vliv. Výsledné zrychlení má potom velikost

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{d}^2}.$$

Při zimním sportování se ještě můžeme setkat s pohybem v blízkosti povrchu Země, kdy sportovec opustí pevnou podložku spojenou se Zemí. Vznikají pohyby: volný pád, vodorovný a šikmý vrh. Počáteční výšku nad zemí označme H, okamžitou výšku h.

Při volném pádu z výšky H platí

$$h = H - \frac{1}{2}gt^2, \quad v = gt = \sqrt{2g(H-h)}.$$

Hmotný bod dopadne na zem za dobu $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ rychlostí $v = \sqrt{2gH}$.

Pro vodorovný vrh s počáteční rychlostí o velikosti v_0 musíme uvažovat ve svislé rovině $(x, y; t)$. Potom

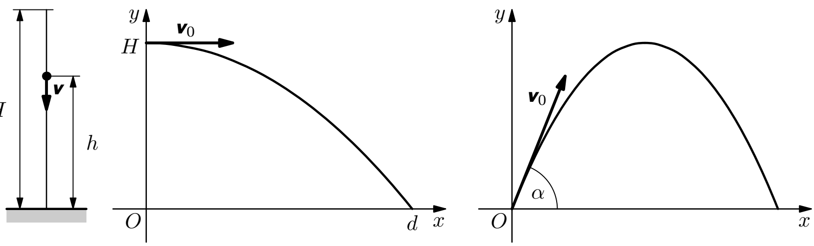
$$x = v_0 t, \quad y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Odtud můžeme po dosazení $y = 0$ určit dobu letu tělesa a délku vrhu:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad d = x = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Často uvažujeme ještě o vrhu šikmém, kde vektor počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ svírá s vodorovným směrem úhel α. Potom při nulové počáteční výšce

$$x = v_0 t \cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$



Pro vznik zrychleného či zpomaleného přímočarého pohybu se zrychlením $\boldsymbol{a}$ je třeba vyvolat sílu $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, která má v případě zrychleného pohybu směr okamžité rychlosti, v případě zpomaleného pohybu směr opačný. Při křivočarém zrychleném či zpomaleném pohybu působí na hmotný bod kolmo ke směru okamžité rychlosti ještě síla dostředivá, která způsobuje zakřivení trajektorie. Pro výpočet velikosti dostředivé síly používáme zpravidla vztah $F_\mathrm{d} = m \cdot \dfrac{v^2}{r}$, kde v je velikost okamžité rychlosti a r poloměr křivosti trajektorie.

Ze sil, které působí na těleso vybíráme s ohledem na naši problematiku následující (uvádíme velikosti sil):

tíhová síla, tíha	$F_G = G = mg$,	
třecí síla,	$F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$,	f je součinitel smykového tření,
		F_n kolmá tlaková síla,
odporová síla	$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} CS\varrho v^2$,	C je odporový součinitel,
		S obsah kolmého řezu,
		ϱ hustota prostředí,
		v velikost rychlosti.

Vyšetřujeme-li pohyb tělesa v rovině Oxy nebo v prostoru $Oxyz$, používáme vztah pro výpočet odporové síly ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{o} = -\frac{1}{2} CS\varrho v \boldsymbol{v},$$

rozepsaný na souřadnice

$$F_x = -\frac{1}{2}CS\varrho v v_x, \qquad F_y = -\frac{1}{2}CS\varrho v v_y.$$

Při řešení pohybu sportovce či náčiní budeme také uvažovat práci při pohybu $W = Fs$, působí-li síla konstantní velikosti ve směru pohybu, nebo $W = Fs\cos\alpha$, pokud síla konstantní velikosti svírá se směrem pohybu úhel α. Dále výkon $P = \frac{W}{t}$, popřípadě okamžitý výkon $P = Fv$.

Pohybující se těleso popíšeme kinetickou energií $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ nebo její změnou, která je rovna spotřebované práci:

$$\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W.$$

Těleso v určitém místě ve výšce h nad hladinou nulové polohové energie popisuje polohová energie $E_\mathrm{p} = mgh$ nebo její změna, která je také rovna spotřebované práci:

$$\Delta E_\mathrm{p} = mgh_2 - mgh_1 = W.$$

Jsou-li odporové síly zanedbatelně malé, můžeme v omezené míře využít zákon zachování mechanické energie. Jsou-li odporové síly nezanedbatelné, tento zákon neplatí.

Při setkání dvou těles o hmotnostech m_1, m_2 a rychlostech $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ využijeme jejich hybnosti $\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2$. Například pro nepružný ráz pak platí zákon zachování hybnosti ve tvaru

$$\boldsymbol{p} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Zákon zachování hybnosti nám umožňuje řešení mnoha variací úloh v závislosti na geometrickém vztahu vektorů rychlostí $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, poměru hmotností těles aj.

Při popisu otáčivého pohybu tělesa kolem pevné osy se uplatní veličina moment hybnosti $\boldsymbol{L}$, jejíž velikost je $L = J\omega$. Pokud na těleso nepůsobí vnější síly, platí zákon zachování momentu hybnosti. Jestliže těleso působením vnitřních sil změní tvar a tím i moment setrvačnosti z J_1 na J_2, změní se i jeho úhlová rychlost z ω_1 na ω_2, přičemž platí

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2.$$

2 Zimní sporty na vodorovné rovinné ploše

Jestliže vynecháme běžectví, biatlon a závody psích spřežení, potom nám zbývají jen sporty na ledové ploše. Mezi sporty, které podrobíme naší pozornosti, patří rychlobruslení, krasobruslení, curling a lední hokej. Tyto zimní sporty jsou zařazeny mezi olympijské disciplíny.

2.1 Rychlobruslení

Rychlobruslení je individuální zimní sport. Koná se na oválných ledových drahách o délce 400 m, které mají na kratších stranách zatáčky o poloměru 25 m. Závodí se ve dvojicích na drahách o šířce 4,0 m a po každém kole si své dráhy musejí závodníci vyměnit. Závody probíhají pro muže na trasách o délce 500 m, 1 500 m, 5 000 m, 10 000 m, po ženy 500 m, 1 500 m, 3 000 m, 5 000 m.

U rychlobruslení nás zajímá průměrná rychlost sportovce, avšak měřením se určuje doba, za kterou od startu sportovec dosáhl cíle.

Příklad 1. České rychlobruslařky v akci
Ve dnech 21.–24. března 2013 se konalo v Soči v pořadí již 15. mistrovství světa v rychlobruslení, kterého se zúčastnily české závodnice Martina Sáblíková a Karolína Erbanová. Dosáhly následujících velmi dobrých časů:

Karolína — 500 m $\rightarrow$ 38,48 s, 1 000 m $\rightarrow$ 76,1 s, 1 500 m $\rightarrow$ 119,0 s,
Martina — 3 000 m $\rightarrow$ 244,5 s, 5 000 m $\rightarrow$ 414,3 s.

Určete průměrné rychlosti sportovkyň na trasách.

Výsledky:
Průměrné rychlosti Karolíny:

$12{,}99\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 46{,}78\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $13{,}14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 47{,}31\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$,
$12{,}61\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 45{,}38\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Průměrné rychlosti Martiny:

$12{,}27\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 44{,}17\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $\quad 12{,}07\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 43{,}45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Úlohy

1. **Průměrné rychlosti**

   Určete průměrné rychlosti Martiny Sáblíkové v roce 2010 na zimních olympijských hrách ve Vancouveru, kde získala zlatou medaili na trase 5 000 m, kterou zdolala za 6 min 50,92 s. Další zlatou medaili získala na trase 3 000 m, kterou zdolala za 4 min 2,53 s, na trase 1 500 m získala bronzovou medaili za dobu 1 min 57,96 s.

2. Rozjezd rychlobruslařky

Rychlobruslařka se po startu rozjíždí z klidu a snaží se co nejdříve dosáhnout plné rychlosti a tu pak udržovat až do cíle. Předpokládejme, že rozjezd Karolíny na trati 500 m v příkladu 1 byl pohyb rovnoměrně zrychlený a trval 8 s. Po rozjezdu se pohybovala až do cíle stálou rychlostí.

a) Určete, jaké rychlosti během rozjíždění dosáhla, a porovnejte ji s průměrnou rychlostí celého závodu.
b) Určete, s jakým zrychlením se rozjížděla.

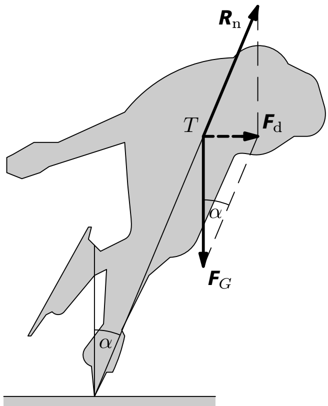
Příklad 2: Rychlobruslařky v zatáčce

Závodní trasa se skládá ze dvou přímých úseků, na které navazují dva úseky tvaru půlkružnic o poloměru 25 m. Závodnice projíždí celou zatáčku stálou rychlostí $45\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

a) Jak velké je dostředivé zrychlení?
b) Jak vzniká potřebná dostředivá síla?
c) Určete sklon závodnice v zatáčce,

Řešení:

Situaci popíšeme v inerciální vztažné soustavě spojené se stadionem, tedy z hlediska pozorovatele přihlížejícího z tribuny.



a) Dostředivé zrychlení má velikost $a_\mathrm{d} = \dfrac{v^2}{r} = 6{,}25\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

b) V zatáčce reakce ledové plochy $\boldsymbol{R}$ míří šikmo dovnitř zatáčky a rozkládá se na složku $\boldsymbol{R}_\mathrm{n}$ kolmou ke směru okamžité rychlosti, která se uplatní při vzniku dostředivé síly, a na složku $\boldsymbol{R}_\mathrm{t}$ namířenou proti směru okamžité rychlosti, což je smykové tření. Dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ je výslednicí tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a složky reakce $\boldsymbol{R}_\mathrm{n}$

c) Z obrázku je zřejmé, že pro úhel sklonu závodnice počítaný od svislého směru platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{d}}{F_G} = \frac{v^2}{rg} = \frac{12{,}5^2\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}{25\ \mathrm{m}\cdot 9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 0{,}637,$$

$\alpha = 32{,}5°$; pro menší rychlost bude odklon menší. Výsledky záleží i na tom, zda jede po vnitřní nebo vnější trase.

Příklad 3: Jaký je výkon bruslaře?
Rychlobruslař o hmotnosti 80 kg jede stálou rychlostí 12,8 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Součinitel smykového tření brusle po ledu je 0,027, závodník při jízdě v přiléhavém obleku má součinitel odporu $C = 0{,}70$; obsah kolmého příčného řezu je 0,80 m^2. Určete výkon bruslaře a) na přímém úseku tratě, b) v zatáčce o poloměru 25 m. Musíme ještě odhadnout hustotu vzduchu ($\varrho \doteq 1{,}20\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$).

Řešení:

a) Výkon bruslaře určíme pomocí vztahu $P = Fv$, kde v je okamžitá rychlost a F velikost celkové odporové síly, která se skládá ze síly odporu vzduchu o velikosti $F_\mathrm{o} = \frac{1}{2}CS\varrho v^2$ a síly smykového tření, která má na rovném úseku velikost $F_\mathrm{t} = fmg$. Celková síla, kterou musí bruslař překonávat na rovném úseku, má velikost $F = fmg + \frac{1}{2}CS\varrho v^2$.

$$F_\mathrm{t} = 21{,}2\ \mathrm{N}, \quad F_\mathrm{o} = 55{,}1\ \mathrm{N}, \quad \text{celková odporová síla} \quad F = 76{,}3\ \mathrm{N}.$$

Výkon závodníka $P \doteq 980$ W.

b) V zatáčce působí bruslař na led kromě tíhy ještě odstředivou silou o velikosti $\frac{mv^2}{r}$. Třecí síla se zvětší na $F'_\mathrm{t} = f\sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2v^4}{r^2}}$.

$$F'_\mathrm{t} = 25{,}6\ \mathrm{N}, \quad \text{celková odporová síla} \quad F' = 80{,}7\ \mathrm{N}.$$

Závodník musí v zatáčce zvětšit výkon na $P' \doteq 1\,030$ W.

2.2 Curling

Curling (nepřesně česky lední metaná) je zimní sportovní disciplína, která je již 80 let (s přestávkami) zařazena mezi zimní olympijské sporty. Hraje se s žulovými kameny, jejichž průměr má být nejvýše 29,09 cm, výška bez plastové hlavice s držadlem nejméně 11,43 cm. Hmotnost kamene včetně držadla nesmí být větší než 19,96 kg. Dále potřebují hráči speciální obuv (na jedné botě je klouzavá podrážka, na druhé naopak podrážka protiskluzová.

Curling se hraje v krytých halách (kvůli kvalitě ledu), led se při tvorbě kropí a uhlazuje. Podrobnosti o hřišti a o hře najdeme na Wikipedii pod heslem Curling.

Z fyzikálního hlediska nás zajímá problematika smykového tření žulového kamene po ledu. I když jsme ani na internetových stránkách nenašli příslušnou hodnotu, pokusíme se odhadnout $f = 0{,}025$; tuto hodnotu lze potom ještě ovlivňovat tzv. „metáním“, kdy se ledový povrch zametá koštětem tak, aby se snížila hodnota jeho smykového tření a u již pomalu se pohybujícího kamene prodloužila dráha pohybu.

Příklad 4: Rychlost odhodu
Hrací kámen má hmotnost m přibližně 20,0 kg, vzdálenost středu cílového kruhu od čáry odhodu je $s = 28{,}35$ m.

a) Jaká by měla být velikost v_0 rychlosti kamene na čáře odhodu, aby se zastavil přesně uprostřed cílového kruhu, je-li součinitel smykového tření mezi kamenem a ledem $f = 0{,}025$?
b) Jak velká třecí síla kámen brzdí?
c) Do jaké vzdálenosti s_1 od startu se kámen dostane při stejně velké počáteční rychlosti, zmenšíme-li metením ledu před kamenem součinitel smykového tření na $f_1 = 0,022$?

Řešení

a) Počáteční kinetickou energii kamene na čáře odhodu porovnáme s prací proti třecí síle:
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F_\mathrm{t}s = fmgs \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2fgs} = 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$
b) Třecí síla má velikost $F_\mathrm{t} = fmg \doteq 0{,}49$ N.
c) Pro brzdné dráhy platí
$$s = \frac{v_0^2}{2gf}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2gf_1}.$$
Z toho
$$\frac{s_1}{s} = \frac{f}{f_1} \quad \Rightarrow \quad s_1 = s\frac{f}{f_1} \doteq 32\ \mathrm{m}.$$

2.3 Krasobruslení

Zatímco při rychlobruslení se snaží sportovec dosáhnout co největší rychlosti, při krasobruslení se naopak jezdí pomaleji a jízda je doplněna figurami a různými skoky. Výkony sportovců potom nemohou být objektivně měřeny, a tak jsou hodnoceny skupinou rozhodčích, kteří se zaměřují na techniku provedení i na umělecký dojem.

Při krasobruslení mohou být následující kategorie vystoupení: jednotlivci — — muži a ženy, taneční páry, sportovní dvojice, synchronizované bruslení. Soutěže probíhají odděleně v různých věkových kategoriích. Ze sportovního hlediska je důležité, že jsou povinné dva programy, které sportovci musejí předvést — — krátký program a volné jízdy. V krátkém programu jsou zařazeny přesně vymezené povinné prvky, jako např. pirueta, sólový skok, kombinace skoků, kroková variace a sekvence spirál. Ve volných jízdách jsou také předepsány určité prvky, ale jízda je delší, takže choreografové a trenéři mají větší volnost při jejich sestavení.

Program sportovních dvojic představuje společné bruslení dvou bruslařů — muže a ženy, kteří navazují jednotlivé prvky do určité posloupnosti tak, aby vznikl dojem skutečné párové jízdy. Oba sportovci se mohou od sebe na chvíli vzdálit, avšak musejí zachovávat součinnost páru. Bruslí na určitou hudbu, která představuje vhodný doprovod ke sportovnímu výkonu. Jízda může být samostatně nebo symetricky uspořádaná, využívají se zvedané figury, odhazované skoky, spirály, párové piruety propojované krokovými variacemi. Základním dojmem pro obecenstvo musí zůstávat harmonie a jednotnost provedení.

Také taneční páry mají v posledních dvou letech obdobnou strukturu vystoupení — musejí předvést krátký (povinný) program a volnou jízdu. Při vystoupení nejsou dovoleny skoky nebo samostatné piruety, hlavním úkolem je navzájem s partnerem vystupovat sladěně, v souladu s hudebním doprovodem.

Synchronizované bruslení je společné vystoupení několika krasobruslařů, jejichž pohyby na ledě jsou vhodně sladěny tak, že provádějí různé formace, pohyby a prvky ve stejném provedení celou skupinou. Také zde se soutěž skládá z krátkého programu a volné jízdy, celá skupina musí vyjadřovat svým pohybem dojem jednoho celku.

Z fyzikálního hlediska můžeme nalézt několik zajímavých dějů a jevů, které jsme v předchozích dvou sportech nezaznamenali. Jde především o skoky — přímé nebo s otočkou, dále o piruety a o setkání obou partnerů za jízdy.

Při skoku je důležité, o kolik se zvýší těžiště sportovce a jakou vodorovnou složku má jeho okamžitá rychlost. K tomu můžeme vyjít ze zákonitostí pro vrh šikmý a odhadnout, v jaké vzdálenosti sportovec dopadne zpátky na led, případně jaká doba uplyne, po níž je sportovec ve vzduchu a stihne provést nějakou otočku.

Příklad 5: Skok krasobruslaře

Krasobruslař se pohybuje v daný okamžik rychlostí $2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, když se odrazí od ledu a letí vzduchem. Odhadneme, že jeho těžiště se přitom zvedne o 40 cm, při druhém skoku o 60 cm, tak, že letí po určitou dobu vzduchem, a poté dopadne na led. Jak dlouho trvá skok a jaká je délka skoku?

Řešení

Pro řešení problematiky zvolíme jednoduchý model tak, že budeme popisovat pohyb těžiště tohoto sportovce. Protože známe výšku h, do které těžiště vystoupilo, pokusíme se stanovit velikost v_y svislé složky jeho rychlosti v okamžiku odrazu a dobu t jeho letu vzduchem. Pro změny energie platí

$$\frac{1}{2}mv_y^2 = mgh, \quad \text{tedy} \quad v_y = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\cdot 0{,}4\ \mathrm{m}} \doteq 2{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Doba t_1, za kterou těžiště sportovce vystoupí do výšky h, je

$$t_1 = \frac{v_y}{g} \doteq 0{,}286\ \mathrm{s}.$$

Sportovec dopadne na led za dobu $t = 2t_1$ ve vzdálenosti

$$d = v_x \cdot 2t_1 = 2{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \cdot 0{,}57\ \mathrm{s} \doteq 1{,}1\ \mathrm{m}.$$

Za dobu 0,57 s zvládne krasobruslař udělat půl otočky, jednu nebo dvě otočky kolem svislé osy procházející těžištěm.

Dosadíme-li za změnu výšky těžiště údaj $h = 0{,}60$ m, dostaneme hodnoty $v_y = 3{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $t = 0{,}70$ s, $d \doteq 1{,}4$ m.

Příklad 6: Zachycení krasobruslařky 1

Krasobruslař má hmotnost 72 kg a jede rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dostihne stojící krasobruslařku o hmotnosti 48 kg, chytí ji v pase a zvedne ji. Jaká bude rychlost obou sportovců jedoucích společně?

Řešení:

Zachycení krasobruslařky můžeme považovat za nepružný ráz. Označíme hmotnost bruslaře m_1, bruslařky m_2 a rychlost bruslaře před zachycením v_1 a jejich hybnosti před zachycením $p_1 = m_1v_1$, $p_2 = 0$, po zachycení $p = (m_1 + m_2)v$. Ze zákona zachování hybnosti $p = p_1 + p_2$ plyne

$$v = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{72\cdot 5}{120}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 3{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Příklad 7: Zachycení krasobruslařky 2

Nechť v minulé úloze jede krasobruslařka sama rychlostí $2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ stejným/opačným směrem jako krasobruslař. Které údaje, jevy a zákonitosti můžeme převzít z minulé úlohy a které ne? K jakým výsledkům se dopracujeme?

Řešení:
I v tomto případě použijeme zákon zachování hybnosti. Celková hybnost dvojice před setkáním je stejná jako po setkání. Platí $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ a výsledná rychlost je

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{72 \cdot 5 + 48 \cdot 2}{120}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

V případě opačného směru získáme výpočet

$$v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{72 \cdot 5 - 48 \cdot 2}{120}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 2{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$


Příklad 8: Krasobruslařská dvojice
Krasobruslař jedoucí s partnerkou stejnou rychlostí ji odstrčil ve směru pohybu. Při odstrčení partnerky se jeho rychlost zmenšila na $v_1 = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, krasobruslařka získala odstrčením rychlost $v_2 = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Oba se pak pohybovali setrvačností až do zastavení. Jaká byla jejich vzdálenost, když se oba zastavili? Vzhledem k malé rychlosti pohybu můžeme při řešení pohybové rovnice pominout odpor prostředí. Protože se však každý bruslař, který se neodráží pro udržení pohybu, nakonec zastaví, musíme uvážit sílu smykového tření. Tabulky udávají součinitel smykového tření oceli po ledu $f = 0{,}027$.

Řešení:
Při pohybu sportovce na bruslích na něj působí třecí síla o velikosti $F_\mathrm{t} = fmg$, která způsobuje zpomalení bruslaře. Ze zákona síly $F = ma$ plyne pro velikost

zrychlení $a = fg$. Pro dané hodnoty vychází pro oba partnery

$$a = 0{,}027 \cdot 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0{,}265 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb bruslaře platí v okamžiku zatavení

$$v = v_1 - at = 0.$$

Zastaví tedy za dobu $t_1 = \dfrac{v_1}{a}$. Dráha nutná k jeho zastavení je $s_1 = \dfrac{v_1^2}{2a}$. Bruslařka zastaví za dobu $t_2 = \dfrac{v_2}{a}$ a dráha nutná k jejímu zastavení je $s_2 = \dfrac{v_2^2}{2a}$. Vychází

$$t_1 = 4{,}5 \text{ s}, \quad s_1 = 2{,}7 \text{ m}, \quad t_2 = 5{,}7 \text{ s}, \quad s_2 = 4{,}2 \text{ m}.$$

Vzájemná vzdálenost obou bruslařů v okamžiku, kdy se oba zastavili, je 1,5 m.

Známe-li velikost brzdící síly, můžeme k výsledku dospět i na základě energetického pohledu. Práce na překonání třecí síly jde na vrub změny pohybové energie. Protože rychlost při zastavení tělesa je nulová, platí

$$W = F_\text{t} s = \frac{1}{2} m v^2 - 0, \quad \text{tedy} \quad s = \frac{mv^2}{2F_\text{t}} = \frac{mv^2}{2fmg} = \frac{v^2}{2fg} = \frac{v^2}{2a},$$

takže jen rychlejším způsobem dojdeme ke stejnému výsledku.

Příklad 9: Jeden sportovec se zastavil, a co druhý?
V okamžiku, kdy se sportovec — muž v příkladu 8 zastavil, sportovkyně se ještě pohybovala. Jaká byla v tomto okamžiku vzájemná vzdálenost a vzájemná rychlost obou sportovců?

Řešení:
V čase $t_1 = \dfrac{v_1}{fg}$, kdy se sportovec zastavil, byla dráha sportovkyně

$$s = v_2 t_1 - \frac{1}{2} g f \cdot t_1^2 = \frac{v_1 v_2}{fg} - \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{fg} = \frac{v_1}{2fg}(2v_2 - v_1).$$

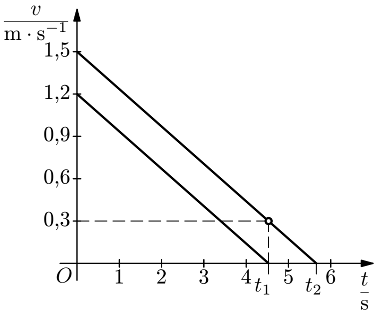
Po dosazení vychází

$$s = \frac{1{,}2}{2 \cdot 0{,}027 \cdot 9{,}81}(3{,}0 - 1{,}2) \text{ m} = 4{,}1 \text{ m}.$$

Sportovkyně se v okamžiku zastavení sportovce pohybuje rychlostí

$$v = v_2 - at_1 = v_2 - fg \cdot \frac{v_1}{fg} = v_2 - v_1 = 0{,}3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výsledek můžeme ověřit i graficky. Sestrojíme graf závislosti $v(t)$ od okamžiku, kdy se oba sportovci při figuře rozdělili. Zajímavé je, že i když počáteční rychlosti obou sportovců i doby pohybu do zastavení jsou různé, obě úsečky vyjadřující závislosti $v(t)$ jsou rovnoběžné, protože „zpomalení“ obou je (i přes různost hmotností a třecích sil) stejně velké.



Při krasobruslení nesmíme zapomenout na piruety, které zvyšují umělecký dojem a mají i vysokou technickou hodnotu. Pirueta vzniká při rotačním pohybu bruslařky, přičemž osa rotace má svislý směr a prochází těžištěm. Sportovkyně může změnit frekvenci rotace, aniž by na ni působila další (okolní) tělesa, neboť může změnit moment setrvačnosti. I když se nemění hmotnost tělesa, může se změnit její rozložení vzhledem k ose otáčení. Potom podle zákona zachování momentu hybnosti

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2, \quad \text{po dosazení} \quad J_1 f_1 = J_2 f_2.$$

Příklad 10 Bruslařka zahajuje rotaci s rukama rozpaženýma a jednou nohou unoženou. Pak náhle překříží ruce před tělem nebo je vztyčí nad hlavu. Odhadněme, že moment setrvačnosti krasobruslařky o hmotnosti 48 kg s rozpaženýma rukama a unoženou nohou vzhledem k ose procházející těžištěm je $J_1 = 3{,}0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, s rukama překříženýma na hrudi nebo zvednutýma nad hlavu je $J_2 = 1{,}0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$. Jak se změní frekvence otáčení?

Řešení:
Poměr frekvencí rotace ve výsledném postoji a počáteční frekvence je

$$f_2 : f_1 = J_1 : J_2 = 3,$$

tedy při piruetě se původní frekvence rotačního pohybu zvýší třikrát, $f_2 = 3f_1$.

Také při skocích využívají krasobruslaři zákon zachování momentu hybnosti. Během odrazu se snaží dosáhnout rotace při co největším momentu setrvačnosti, který během skoku zmenší přinožením a skřížením rukou na prsou. Tím dosáhnou značného zvýšení úhlové rychlosti a před dopadem na led vykonají ve vzduchu několik otáček.

Úlohy

3. Sportovní dvojice o hmotnostech 72 kg a 48 kg jela těsně za sebou rychlostí 2,4 m · s^{-1} vzhledem k ledové ploše. Muž odstrčil partnerku před sebe ve směru pohybu tak, že vzhledem k němu získala relativní rychlost 0,8 m · s^{-1}.

a) Jakými rychlostmi se pohybovali oba sportovci vzhledem k ledové ploše bezprostředně po odstrčení?

b) V jaké vzájemné vzdálenosti se nacházeli poté, co se oba zastavili účinkem třecích sil? Počítejte se součinitelem smykového tření oceli na ledu 0,027.

4. Pří skoku trojitý axel vykoná krasobruslař ve vzduchu tři a půl otáčky. S jakou frekvencí se musí otáčet, je-li výška jeho skoku 60 cm?

2.4 Lední hokej

Lední hokej patří mezi oblíbené zimní sporty (v případě možnosti trénovat na umělém kluzišti lze říci celoroční), a to jak pro samotné hráče, tak je velmi populární i pro jejich fanoušky.

Kromě dobrého bruslení vyžaduje i dobrou strategii hry, ovládání dovednosti pracovat s pukem, koordinaci hráčů, taktiku a odvahu v osobních kontaktech. Po stránce fyzikální nás může zajímat především pohyb puku po ledové ploše, protože jeho rychlost a rychlost reagování hráčů na jeho polohu může podstatně ovlivnit hru.

Puk (touš, kotouč) má tvar plochého válce, který je vyroben z vulkanizované pryže. Má průměr asi 76,2 mm a výšku 25,4 mm (v anglické měrové soustavě 3 inch, 1 inch), hmotnost podle způsobu výroby od 156 g do 170 g. Při výpočtech užijeme střední hodnotu 163 g. Vystřelený puk může dosáhnout rychlosti až $160\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, tj. $45\ \mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. Puk musí mít některé vlastnosti jako dobrou tvrdost, ale i elastičnost, projevovat značnou odrazivost.[1]

Podstatným problémem zůstává součinitel smykového tření, který nebývá uveden a jehož rozmezí 0,10 — 0,20 podstatně ovlivňuje výpočty, neboť nejistota je příliš velká (vezmeme-li střední hodnotu $f = 0{,}15$, potom se krajní hodnoty 0,10 a 0,20 od této střední hodnoty liší o více než 30 %). Změřit hodnotu součinitele smykového tření v laboratorním prostředí by pravděpodobně nebyl problém, ale hodnota součinitele je závislá i na druhé styčné ploše, kterou je ledová plocha s ledem různé kvality, kterou nelze standardizovat. Přesto však se pokusíme naznačit řešení několika fyzikálních problémů motivovaných pohybem puku.

Příklad 11: Odhad některých hodnot veličin u puku

Při řešení této úlohy si budeme klást jednotlivé otázky a po obecném připomenutí se budeme snažit dospět k číselnému výsledku. Počáteční rychlost puku zvolíme $5{,}0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (varianty $10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $30\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $40\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$).

a) Jaká je hustota puku (bude ve vodě plovat)?

   Objem puku $V = \pi r^2 h = 116\ \mathrm{cm}^3$, hustota $\varrho = \dfrac{m}{V} = 1{,}4\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$, ve vodě plovat nebude.

b) Jakou hybnost má puk, jehož rychlost je výše uvedena?

   Hybnost $p = mv = 0{,}82\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $1{,}63\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $2{,}45\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $4{,}9\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $6{,}5\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

c) Jaká byla pohybová energie puku?

[1] Zajímavá pro nás může být informace, že v poslední době se mezinárodní hokejové turnaje odehrávají s puky moravské výroby, neboť nezanechávají žádné stopy na dřevěných mantinelech a plexisklových ochranných stěnách (firma Gufex v Kateřinicích).

Pro energii platí $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$,

tedy číselně 2,04 J, 8,15 J, 18,3 J, 73,4 J, 130 J.

d) Jestliže brankář ztlumí puk rukavicí, přičemž puk zastaví na dráze 10 cm, jak velkou silou a jak dlouho musí na puk působit (a puk působí na ruku brankáře)? Předpokládáme zjednodušeně, že velikost brzdné síly během zastavení puku je konstantní a pohyb puku je tedy rovnoměrně zpomalený.

Pro brzdnou sílu platí $Fs = \frac{1}{2}mv^2 = E_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mv^2}{2s} = \frac{E_\mathrm{k}}{s}$,

tedy číselně pro jednotlivé rychlosti: 20,4 N, 81,5 N, 183 N, 734 N, 1 300 N.

Brzdná doba puku je $t = \frac{2s}{v}$,

tedy číselně 0,04 s, 0,02 s, 0,013 s, 0,0067 s, 0,005 s.

e) Proč je nebezpečný náraz přímo do těla brankáře? Proč nosí brankář na obličeji chrániče?

Při nárazu do obličeje je dráha k zastavení puku ještě kratší, a proto způsobí bolestivý úraz doprovázený zlomeninami kostí a poškozením svalstva.

Příklad 12: Puk klouže po ledu

Zvolíme-li hodnotu součinitele smykového tření $f = 0{,}15$ s nejistotou 33 %, pak puk, kterému bude udělena počáteční rychlost v_0, se bude pohybovat rovnoměrně zpomaleně. Určete vzdálenost, do které se dostane.

Řešení:

Puk o hmotnosti m působí na led tíhou $G = mg$ a při posuvném pohybu vyvolá třecí sílu $F_\mathrm{t} = fmg$, takže má za následek zpomalení $a = fg$. Zpomalení vychází $a = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ s tolerancí od $1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ do $2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. V případě počáteční rychlosti v_0 pak platí pro zpomalený pohyb $v = v_0 - at$, pro dobu nutnou k zastavení $t = \frac{v_0}{a}$, dráhu pro zastavení $s = \frac{v_0^2}{2a}$. Pro jednotlivé výše uvedené rychlosti pak vychází při zaokrouhlení $g \doteq 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Uvedená rychlost	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	5	10	15	30	40
Dolní hranice doby	s	2,5	5,0	7,5	15	20
Střední doba	s	3,3	6,7	10	20	27
Horní hranice doby	s	5,0	10	15	30	40
Dolní brzdná dráha	m	6,2	25	56	225	400
Střední dráha	m	8,3	33	75	300	533
Horní brzdná dráha	m	12,5	50	112	450	800

Příklad 13: Hokejista odpálil puk k hrazení

Hokejista odpálil puk ze vzdálenosti 40 m od hrazení a hned se vydal za ním. Puk se za dobu 2,5 s odrazil od hrazení a po nedokonale pružném odrazu se za dobu 4,0 s zastavil ve vzdálenosti 12,8 m od hrazení.

a) Jaká byla počáteční rychlost puku, jeho rychlost bezprostředně před dopadem na hrazení a bezprostředně po odrazu od hrazení?
b) Jakou rychlostí by musel jet hokejista, aby po „nahození“ puku na hrazení jej dostihl před jeho zastavením?
c) Do grafu $v(t)$ zakreslete matematický model pohybu puku.

Řešení:

a) Označme s_1, s_2 dráhy puku před odrazem a po odrazu, v_0, v_1, v_2 hledané velikosti rychlostí. Pro rovnoměrně zpomalený pohyb puku po odrazu platí

$$s_2 = \frac{v_2 t_2}{2} = \frac{1}{2} a t_2^2.$$

Z toho

$$a = \frac{2s_2}{t_2^2} = \frac{25{,}6}{16}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 1{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}, \quad v_2 = \frac{2s_2}{t_2} = \frac{25{,}6}{4}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 6{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb puku od odpálení do odrazu platí

$$v_1 = v_0 - at_1, \quad s_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1 = v_0 t_1 - \frac{a}{2} t_1^2.$$

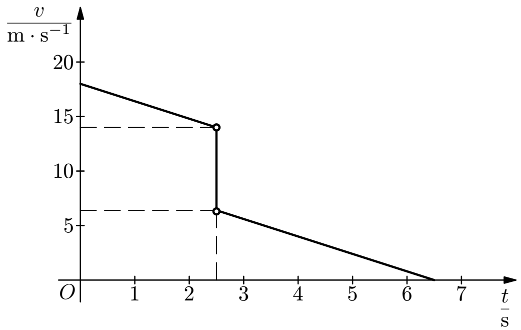
Z toho $v_0 = \dfrac{s_1 + \frac{1}{2} a t_1^2}{t_1} = \dfrac{40 + 0{,}8 \cdot 6{,}25}{2{,}5}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

$$v_1 = (18 - 1{,}6 \cdot 2{,}5)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

b) Hokejista musí urazit dráhu $s_3 = 40\ \mathrm{m} - 12{,}8\ \mathrm{m} = 27{,}2\ \mathrm{m}$.

Jeho rychlost musí být minimálně $v_\mathrm{H} = \dfrac{27{,}2}{6{,}5}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

c)



3 Zimní sporty v ledovém korytu

Existuje několik zimních sportů, které vyžadují — zejména z hlediska bezpečnosti — přesně vymezenou trať, protože sportovci dosahují značných rychlostí. Současně je nutné, aby během pohybu byly překonány odporové a třecí síly, a proto se k udržení pohybu využívá přirozené tíhové síly způsobené gravitací Země na nakloněné rovině. Do této kategorie — pohyb sportovce s náčiním (nářadím) v ledovém korytu — patří bobování, jízda na saních a jízda na skeletonu. Protože se všechna nářadí chovají podobně, zkusíme nejprve popsat obecné charakteristiky.

Trasa pohybu je zvolena tak, aby byla pro sportovce i pro diváky zajímavá. Na různých místech má různý sklon $p = \sin\alpha = \dfrac{\Delta h}{\Delta l}$, kde Δh je výškový rozdíl úseku trati o délce Δl. Přímé úseky jsou vystřídány pohybem na trati se zatáčkami. Tak např. nebezpečná olympijská dráha Whistler nedaleko kanadského Vancouveru má start v nadmořské výšce 938 m, cíl je ve výšce 786 m n. m., celkové převýšení je tedy 152 m při délce trati 1 450 m. Na trati je rozmístěno 16 zatáček. Maximální sklon tratě je v oblasti druhé zatáčky a činí 20 %, což představuje úhel sklonu asi 11,5°. Z charakteristiky trati ($h = 152$ m, $l = 1\,450$ m) získáme celkový průměrný sklon asi 10,5 %, tedy průměrný úhel sklonu 6°. Přestože průměrný sklon trasy se zdá být poměrně malý, hraje zde velkou roli velmi malé smykové tření oceli při pohybu po ledové ploše i odporová síla při pohybu, značně ovlivnitelná hodnotami veličin C, S a závislá na hodnotě v.

3.1 Jízda na bobu

Jízda na bobu je podmíněna třemi faktory, mezi něž patří počet závodníků, tomu odpovídající technické parametry bobu a vlastnosti trasy. Soutěžit mohou dvě ženy, dva muži nebo čtyři muži. V případě dvoučlenné posádky jeden člen bob řídí a druhý brzdí. V případě čtyřčlenné posádky zbylí dva členové představují zátěž do předepsané hodnoty a uplatní se jen při rozjezdu. Kromě odborné literatury lze řadu informací pochopit i nevážně shlédnutím filmu Kokosy na sněhu (Cool Runnings), který je možno shlédnout i na internetu.

Laminátový bob opatřený lyžinami s ostrými noži má aerodynamický tvar, takže na ledovém povrchu včetně zatáček dosahuje rychlosti až 130 km $\cdot$ h^{-1}. Na počátku ho musí posádka roztlačit na co největší rychlost, naskákat do něj před první zatáčkou, zvládnout jízdu v ledovém korytě a nakonec bob úplně zastavit. K tomu má každý sportovec speciální boty s „hřebíky“, vhodnou kombinézu a helmu aerodynamického tvaru.

Dvoumístný bob s mužskou posádkou má prázdný hmotnost 170 kg, se dvěma jezdci nejvýše 390 kg.

Dvoumístný bob s ženskou posádkou má prázdný hmotnost 129 kg, se dvěma jezdkyněmi nejvýše 340 kg.

Čtyřmístný bob s mužskou posádkou má prázdný hmotnost 210 kg, se čtyřmi jezdci nejvýše 630 kg.

Roztlačení ve startovní části trvá asi 6 s a získaná rychlost může rozhodnout o výsledku závodu. Úkolem řidiče bobu je udržovat bob přibližně ve středu dráhy. Vyznačená dolní (low) nebo horní (high) čára vymezují toleranci mezi kratší drahou a menší rychlostí na jedné straně a delší drahou a větší rychlostí na straně druhé.Vede to však i k ohrožení posádky, když se dráha poruší.

Při pohybu tělesa po skloněné přímé jízdní dráze můžeme napsat pohybovou rovnici

$$ma = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - \frac{1}{2}CS\varrho v^2.$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice $\left(a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$, překračuje rozsah výuky na střední škole a vede k poměrně složitým funkcím vyjadřujícím závislost dráhy a rychlosti na čase. Zadáme-li ale číselné hodnoty veličin pro určitý konkrétní případ, můžeme pohyb snadno vyšetřit numerickým modelováním. Při něm sledujeme pohyb v krátkých časových intervalech délky Δt, během kterých se zrychlení téměř nezmění. V každém úseku můžeme můžeme tedy pohyb považovat za rovnoměrně zrychlený. Zvolíme počáteční podmínky $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ a postupným výpočtem určíme rychlosti $v_1, v_2, v_3, \ldots$ a dráhy $s_1, s_2, s_3, \ldots$, pro které platí

$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot \Delta t, \quad s_{i+1} = s_i + v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a_i \cdot (\Delta t)^2,$$

kde $a_i = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{CS\varrho}{2m}v_i^2$ je zrychlení na začátku i-tého intervalu.

Příklad 14: Dvoumístný bob — jízda bez roztlačení
Modelujte sjezd dvoumístného bobu po přímé dráze dlouhé 1 000 m se stálým sklonem 7°. Celková hmotnost bobu s posádkou $m = 390$ kg, součinitel odporu $C = 0{,}35$, obsah příčného řezu $S = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$, hustota vzduchu $\varrho = 1{,}2; \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, součinitel tření $f = 0{,}027$. Zvolte časový krok $\Delta t = 2$ s. Posádka byla líná a bob po startu neroztlačila.

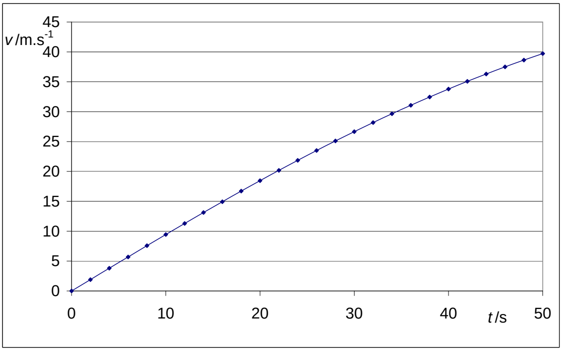
Řešení:
Modelování provedeme v Excelu:

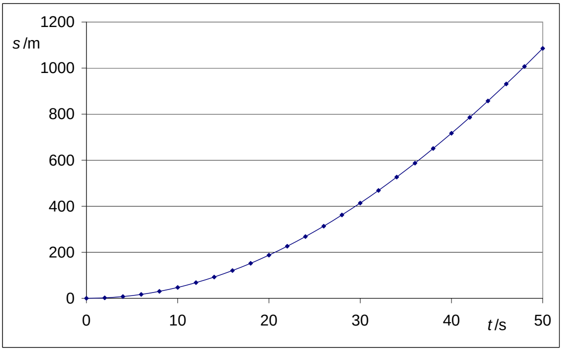
1. Z pohybové rovnice vyjádříme zrychlení a dosadíme číselné hodnoty:
$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{CS\varrho}{2m}v^2 \quad \Rightarrow \quad \{a\} = 0{,}95 - 0{,}00027 \cdot \{v\}^2.$$
2. Vyplníme záhlaví tabulky.

	A	B	C	D
1	*t*/s	*v*/m.s^{-1}	*s*/m	*a*/m.s^{-2}
2	0	0,0	0,0	0,950
3	2	1,9	1,9	0,949
4	4	3,8	7,6	0,946

3. Do buněk A2, B2, C2 vyplníme nuly jako počáteční hodnoty.
4. Do buňky D2 vložíme vzorec pro výpočet zrychlení:
   `=0,95-0,00027*B2^2`
5. Do buňky A3 vložíme vzorec pro výpočet času:
   `=A2+2`
   Do buňky B3 vložíme vzorec pro výpočet rychlosti:
   `=B2+D2*2`
   Do buňky C3 vložíme vzorec pro výpočet dráhy:
   `=C2+B2*2+0,5*D2*4`
   V buňkách se objeví vypočítané hodnoty t_1, v_1 a s_1.
6. Vybereme buňku D2 a zajedeme s kurzorem k jejímu pravému dolnímu rohu. Kurzor se změní v černý křížek — vyplňovací táhlo. Pomocí vyplňovacího táhla dolů zkopírujeme vzorec z buňky D2 do buňky D3. (Přitom se automaticky ve vzorci změní relativní adresa B2 na B3.)
7. Vybereme buňky A3 až D3, zajedeme k pravému dolnímu rohu buňky D3 a pohybem vyplňovacího táhla dolů provedeme kopírování vzorců do dalších řádků s automatickou změnou relativních adres a následně i vyplnění tabulky vypočítanými hodnotami.
8. K tabulce vytvoříme graf rychlosti a graf dráhy. Volíme typ grafu *XY bodový*.

t/s	v/m.s^{-1}	s/m	a/m.s^{-2}
0	0,0	0,0	0,950
2	1,9	1,9	0,949
4	3,8	7,6	0,946
6	5,7	17,1	0,941
8	7,6	30,3	0,935
10	9,4	47,4	0,926
12	11,3	68,1	0,916
14	13,1	92,5	0,903
16	14,9	120,6	0,890
18	16,7	152,2	0,875
20	18,5	187,4	0,858
22	20,2	226,0	0,840
24	21,9	268,1	0,821
26	23,5	313,4	0,801
28	25,1	362,0	0,780
30	26,7	413,8	0,758
32	28,2	468,6	0,736
34	29,6	526,4	0,713
36	31,1	587,2	0,689
38	32,5	650,7	0,666
40	33,8	716,9	0,642
42	35,1	785,8	0,618
44	36,3	857,1	0,594
46	37,5	930,9	0,570
48	38,6	1007,1	0,547
50	39,7	1085,4	0,524





Z tabulky a grafu zjistíme, že bob by dráhu 1 000 m urazil přibližně za 48 s.

S rostoucím časem se zvětšuje rychlost pohybu tělesa po trase, a s tím i velikost odporové síly tak, že může dosáhnout velikosti pohybové složky, takže výsledné zrychlení pohybu bude nulové a nadále se nebude jednat o pohyb zrychlený, nýbrž o pohyb rovnoměrný s mezní rychlostí v_m. Potom

$$0 = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2}CS\varrho v^2 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}}.$$

V našem příkladu vychází

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{0{,}95}{0{,}00027}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 59\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Z tabulky a grafu rychlosti je zřejmé, že náš bob na dráze uvedené délky mezní rychlosti zdaleka nedosáhne ani na přímé trati, natož pak na trati se zatáčkami, kde je zrychlení bobu menší.

Poznámka: Analytickým řešením pohybové rovnice bychom dostali vztahy

$$v = v_\mathrm{m}\frac{\mathrm{e}^{ABt} - \mathrm{e}^{-ABt}}{\mathrm{e}^{ABt} + \mathrm{e}^{-ABt}} = v_\mathrm{m}\mathrm{tgh}(ABt),$$

$$s = \frac{1}{B^2}\ln(\mathrm{e}^{ABt} + \mathrm{e}^{-ABt}) = \frac{1}{B^2}\ln\cosh(ABt),$$

kde $A = \sqrt{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}$, $\quad B = \sqrt{\dfrac{CS\varrho}{2m}}$, $\quad v_\mathrm{m} = \dfrac{A}{B}$.

Úlohy s příbuznou tématikou jsou řešeny ve studijním textu [4].

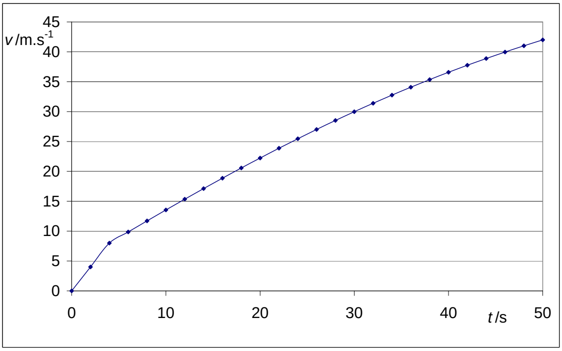
Příklad 15: Dvoumístný bob — jízda s roztlačením

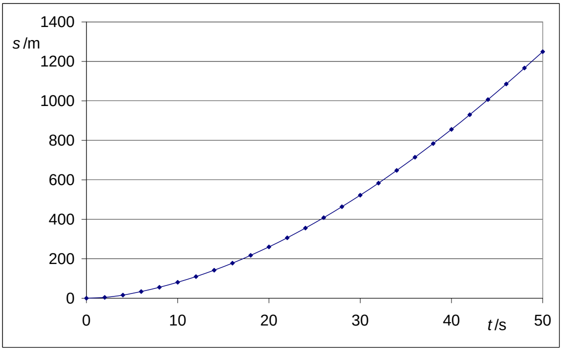
Zjistěte, jak se změní doba jízdy v předcházející úloze, jetliže posádka po startu bude po dobu 4 s bob roztlačovat se stálým zrychlením $a_0 = 2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Řešení:

V Excelu použijeme tabulku a grafy z předcházející úlohy. Změníme pouze hodnotu zrychlení v časech 0 s a 2 s. Zbytek tabulky a grafy se automaticky upraví samy:

t/s	v/m.s^{-1}	s/m	a/m.s^{-2}
0	0,0	0,0	2,000
2	4,0	4,0	2,000
4	8,0	16,0	0,933
6	9,9	33,9	0,924
8	11,7	55,4	0,913
10	13,5	80,7	0,901
12	15,3	109,6	0,886
14	17,1	142,0	0,871
16	18,9	178,0	0,854
18	20,6	217,4	0,836
20	22,2	260,2	0,817
22	23,9	306,3	0,796
24	25,5	355,6	0,775
26	27,0	408,1	0,753
28	28,5	463,6	0,730
30	30,0	522,1	0,707
32	31,4	583,5	0,684
34	32,8	647,6	0,660
36	34,1	714,5	0,636
38	35,4	783,9	0,613
40	36,6	855,8	0,589
42	37,8	930,2	0,565
44	38,9	1006,8	0,542
46	40,0	1085,7	0,519
48	41,0	1166,6	0,496
50	42,0	1249,7	0,474



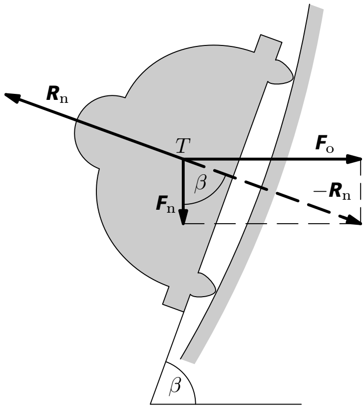


Z tabulky a grafu zjistíme, že bob by dráhu 1 000 m urazil přibližně za 44 s, tedy asi o 4 s dříve než při jízdě bez roztlačení.

Poznámka: Numerické modelování je téměř vždy zatíženo chybami. Přesnost modelu můžeme zlepšit zkrácením časového kroku na polovinu, čtvrtinu atd. Vyzkoušejte to. Zkrácení časového kroku má smysl, pokud je upřesnění modelu nezanedbatelné. S metodami numerického modelování dějů se můžete podrobněji seznámit ve studijním textu [3].

3.2 Jízda bobu v zatáčce

Problém odstředivé síly řešil rychlobruslař sklonem těla v zatáčce. U pohybu bobu, sáněk či skeletonu to sportovci řeší volbou příčného sklonu na trase. Situaci popíšeme z hlediska posádky bobu, tedy v neinerciální vztažné soustavě spojené s bobem.



Pokud se bob pohybuje rovnoměrně, jsou síly ve směru pohybu, tedy pohybová složka tíhové síly, smykové tření bobu o led a síla odporu prostředí, v rovnováze. Zaměříme se na složky sil působící v rovině kolmé ke směru okamžité rychlosti, které rovněž musí být v rovnováze. Je to normálová složka tíhové síly o velikosti $F_{\mathrm{n}} = mg\cos\alpha$, kde α je sklon dráhy, setrvačná odstředivá síla o velikosti $F_{\mathrm{o}} = \frac{mv^2}{r}$ a normálová složka reakce ledové dráhy $\boldsymbol{R}_{\mathrm{n}}$. Optimální je takový příčný sklon dráhy β, kdy výslednice odstředivé síly a normálové složky tíhové síly je kolmá k ledové ploše. Z obrázku odvodíme

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{F_{\mathrm{o}}}{F_{\mathrm{n}}} = \frac{v^2}{rg\cos\alpha}.$$

S rostoucí rychlostí se zvětšuje odstředivá síla, a tak se musí zvětšovat i příčný sklon podložky. Příčný řez zatáčkou pak poněkud připomíná parabolu.

Příklad 16: Sklon bobové dráhy
Pomocí radaru byla změřena rychlost, kterou vjížděl dvojbob do zatáčky s poloměrem 30 m a sklonem dráhy 7°; údaj přístroje byl 71 mph. Jaký je optimální příčný sklon zatáčky, aby bob projel bezpečně?

Řešení:
Zkratka mph znamená mile per hour, tedy anglická míle za hodinu. Pro přepočet do SI tedy

$$71\ \mathrm{mph} = 71 \cdot \frac{1{,}609\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = 114{,}2\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 31{,}7\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

Optimální příčný sklon zatáčky je dán úhlem β, pro který

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v^2}{gr \cos \alpha} = 3{,}44, \quad \beta = 74°.$$

Zrychlení bobu při průjezdu zatáčkou
Po přímém úseku trati se bob pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{mg \sin \alpha - F_\mathrm{t} - F_\mathrm{o}}{m} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{CS\varrho}{2m} v^2.$$

V zatáčce se zvětšuje třecí síla, protože bob se do koryta opírá kromě normálové složky tíhy ještě silou odstředivou. Výslednice obou sil má velikost $\sqrt{(mg \cos \alpha)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2}$. Tečné zrychlení bobu má v zatáčce velikost

$$a_\mathrm{t} = g \sin \alpha - f \sqrt{(g \cos \alpha)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2} - \frac{CS\varrho}{2m} v^2.$$

3.3 Nebezpečí při jízdě na sáňkách a na skeletonu

Jak bylo již výše uvedeno, při jízdě v ledovém korytě se chovají tři sportovní náčiní pro zimní sporty, řízené závodníkem, po fyzikální stránce velmi podobně. Jde o dvoučlenné nebo čtyřčlenné boby, sáně a skeleton. Na saních jezdí buď jedinci nebo dvojice, hmotnost sáněk pro jednotlivce je 21 až 25 kg, pro dvojice 25 až 30 kg. Sportovec jedoucí na sáňkách má hlavu krytou helmou, na těle vhodnou kombinézu, která zmenšuje odpor prostředí na minimum. Za těchto podmínek se na běžných trasách může dosáhnout rychlosti až 140 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Manuel Pfister na trati ve Whistleru na zimních olympijských hrách v roce 2010 dosáhl při tréninku rychlosti až 154 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Bohužel, několik hodin před oficiálním zahájením her při tréninkové jízdě utrpěl gruzínský sáňkař Nodar Kumaritašvili smrtelné zranění. Dráha ve Whistleru byla dosti prudká — na trase 1 450 m bylo klesání 152 m, tedy $p = 0{,}105$, čemuž odpovídá průměrný úhel sklonu 6°. Na skutečné dráze je ovšem sklon dráhy proměnlivý, tedy na různých místech různý, je na ní 16 zatáček, a tak je reálný průjezd trasou dosti komplikovaný.

Skeleton je hodně podobný saním, ale sportovec na něm neleží na zádech nýbrž na břiše a řítí se z kopce dolů hlavou kupředu, několik cm nad ledovou plochou. Počáteční rychlost získá obdobně jako na bobu — sportovec se musí rozběhnout. Rychlost obou sportů činí pohyb velmi nebezpečný.


Úlohy

5. Určete, jaké mezní hodnotě by se přiblížila rychlost sáňkaře na dostatečně dlouhé přímé ledové dráze se sklonem $p = 0{,}18$. Počítejte s hodnotami: hmotnost sportovce i se sáněmi $m = 120$ kg, odporový součinitel $C = 0{,}45$, obsah příčného řezu sportovce $S = 0{,}30\ \mathrm{m}^2$, součinitel smykového tření $f = 0{,}027$, hustota vzduchu $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

6. Porovnejte zrychlení bobu z příkladu 14 při jízdě rychlostí $20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ po přímé trati se sklonem 7,0° s jeho tečným zrychlením v zatáčce o poloměru 20 m při tomtéž sklonu dráhy a stejné rychlosti. V obou případech počítejte se součinitelem smykového tření 0,027.

---

4 Pohyby po zasněženém svahu

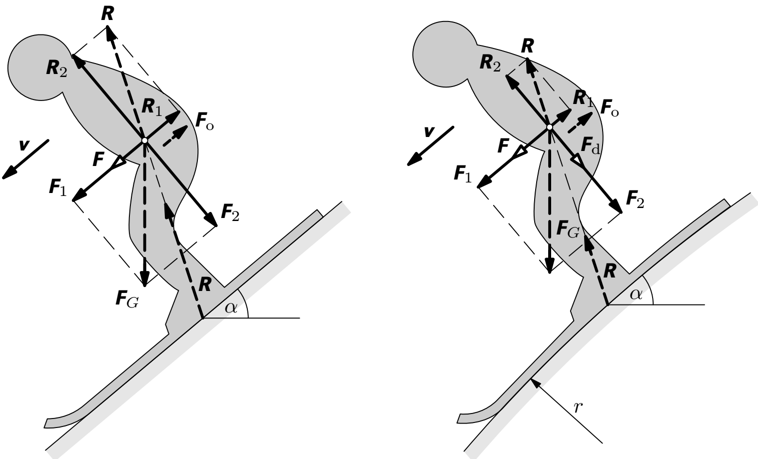
Jízda po zasněženém kopci patří mezi nejznámější zimní sporty. Po stránce sportovní může být kopec více nebo méně prudký, délka vymezené tratě může být dlouhá nebo krátká, pohyb sportovce vytváří přímou trasu nebo jsou sjezdaři nuceni sledovat klikatou trasu po kopci, vymezenou slalomovými brankami. To všechno zahrnujeme mezi tzv. alpské lyžování. Jako specialitu můžeme připojit tzv. krasolyžování (na boulích), skiskating (jízda na ledových rampách), rychlostní lyžování.

4.1 Základní situace lyžaře na zasněženém svahu

Pohyb po přímé dráze se stálým sklonem α (obr. vlevo)

Zrychlení lyžaře, a tedy i výslednice tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$, reakce trati $\boldsymbol{R}$ a síly odporu vzduchu $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ jsou rovnoběžné se svahem. Kolmá složka tíhové síly $\boldsymbol{F}_2$ a kolmá složka reakce $\boldsymbol{R}_2$ se vzájemně ruší a mají stejnou velikost $mg\cos\alpha$. Pohybová složka tíhové síly $\boldsymbol{F}_1$, smykové tření (složka $\boldsymbol{R}_1$ reakce rovnoběžná s dráhou) a odpor vzduchu $\boldsymbol{F}_o$ udělují lyžaři zrychlení popsané vztahem, se kterým jsme se už setkali např. při vyšetřování jízdy bobu

$$a = \frac{F_1 - fF_2 - F_\mathrm{o}}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{CS\varrho}{2m}v^2.$$



Přejezd „bubnu" o poloměru r (obr. vpravo)

Zde se kolmá složka tíhové síly a kolmá složka reakce navzájem neruší. Jejich složením vzniká dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$. V místě se sklonem dráhy α platí

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = mg\cos\alpha - R_2.$$

Složky reakce se oproti jízdě se stálým sklonem dráhy zmenší na

$$R_2 = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r}, \quad R_1 = f\left(mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{r}\right)$$

a tečné zrychlení se zvětší na

$$a_\mathrm{t} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \frac{fv^2}{r} - \frac{CS\varrho}{2m}v^2.$$

To ovšem platí, jen pokud $mg\cos\alpha - \dfrac{mv^2}{r} > 0$, tedy pokud velikost okamžité rychlosti není větší než $v_\mathrm{s} = \sqrt{rg\cos\alpha}$. Dosáhne-li lyžař této rychlosti, odpoutá se od svahu a následuje let vzduchem, jehož délka závisí na následujícím profilu svahu.

Přejezd „dolíku" o poloměru r

Zde míří dostředivá síla proti kolmé složce tíhové síly. V místě se sklonem dráhy α platí

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = R_2 - mg\cos\alpha.$$

Složky reakce se oproti jízdě se stálým sklonem dráhy zvětší na

$$R_2 = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{r}, \qquad R_1 = f\left(mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{r}\right)$$

a tečné zrychlení se zmenší na

$$a_\mathrm{t} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{fv^2}{r} - \frac{CS\varrho}{2m}v^2.$$

Průjezd zatáčky

Při průjezdu zatáčkou je situace složitější a nedá se popsat jednoduchým vzorcem. Po většinu doby je v zatáčce sklon vektoru okamžité rychlosti menší než sklon spádnice svahu. To zmenšuje pohybovou složku tíhové síly. Naopak tlaková složka tíhové síly se poněkud zvětšuje a lyžař působí na svah i odstředivou silou. Proto se třecí síla podstatně zvětšuje oproti přímé jízdě po spádnici. V ostrých zatáčkách lyžař odstředivou silou odhrnuje sníh do strany, čímž se podstatně zvětšuje součinitel smykového tření. To vše způsobuje zmenšení tečného zrychlení lyžaře, v ostrých zatáčkách i jeho zpomalení.

Úlohy

7. Jak velkou rychlostí se pohyboval lyžař, který se při přejezdu bubnu o poloměru křivosti 15 m v místě se sklonem 15 % vznesl nad terén?

8. Při jaké rychlosti se tíha lyžaře projíždějícího nejnižším bodem dolíku o poloměru křivosti 5 m zvětší na dvojnásobek?

Příklad 17

Sjezdovka na hoře Hahnenkamm — v Rakousku v blízkosti Kitzbühlu, cca 400 km od Prahy — na které se jezdí závody světového poháru, je považována za nejtěžší závodní sjezdovou trať světa. Trasa sjezdu má délku 3 312 m, výškový rozdíl mezi startem a cílem je 860 m, největší sklon trati je 85 %, průměrný sklon trati 27 %.

Porovnejte průměrnou rychlost, kterou trať projel lyžař Didier Cuche, když dosáhl rekordního času 1 minuta 54 sekund, s mezní rychlostí, které by dosáhl na svahu s největším sklonem trati. Počítejte s parametry lyžaře $S = 0{,}7\ \mathrm{m}^2$, $C = 0{,}5$, $m = 100$ kg, hustotou vzduchu $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a součinitelem smykového tření $f = 0{,}030$.

Řešení:
Průměrná rychlost závodníka byla $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t} = 29\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

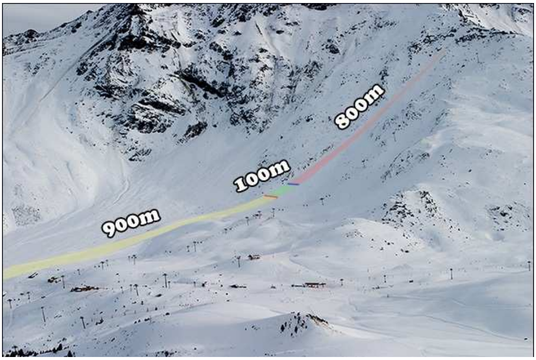
Maximálnímu sklonu 85 % odpovídá úhel sklonu $\alpha \doteq 58°$. Na dlouhém svahu s tímto sklonem by dosáhl mezní rychlosti

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}} = 62\ \mathrm{m \cdot s^{-1}},$$

tedy dvojnásobku průměrné rychlosti.

4.2 Nejrychlejší lyžaři na světě v nebezpečné disciplíně speedski

Rychlostní rekord na lyžích vytvořil italský závodník Simone Origone roku 2006 na trati v Les Arcs ve Francii. Rozjezdový úsek tratě má délku 800 m a sklon 76%, měřený úsek je dlouhý 100 m a brzdná zóna je dlouhá 900 m. Závodník projel měřený úsek rychlostí $251{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.



Příklad 18

Simone Origone při rozjezdu na svahu se sklonem 76 % dosáhl téměř mezní rychlosti. Jaký byl jeho součinitel odporu C? Počítejte s parametry $S = 0{,}5\ \mathrm{m}^2$, $m = 90$ kg, hustotou vzduchu $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a součinitelem smykového tření $f = 0{,}06$.

Řešení:

Pro výpočet je nutné převést rychlost $v = 251{,}4\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 69{,}8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Při dosažení mezní rychlosti je zrychlení lyžaře nulové. Platí

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{CS\varrho}{2m}v_\mathrm{m}^2 = 0.$$

Z toho

$$C = \frac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{S\varrho v_\mathrm{m}^2} \doteq 0{,}44.$$

Poznámka: Součinitel odporu lyžaře se dá určit měřením v aerodynamickém tunelu.

Úloha

9. Rekordman Simone Origone měl po průjezdu měřeným úsekem dalších 900 m na to, aby zastavil. Pro zjednodušení nejprve předpokládejme, že brzdná zóna je vodorovná a její povrch byl upraven tak, že součinitel smykového tření mezi sněhem a lyžemi byl 0,1. Jakou dráhu by Origone urazil, než by zastavil, kdyby ho brzdilo jen smykové tření sněhu?

Příklad 19

Modelujte pomocí Excelu pohyb závodníka v brzdném sektoru s přihlédnutím k odporu vzduchu. Opět předpokládejte, že úsek je vodorovný, $f = 0{,}1$ a že parametry S, m, C a ϱ zůstaly beze změny. Počáteční rychlost $v_0 = 69{,}8\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Řešení:

Budeme postupovat obdobně jako v příkladu 14. Musíme ale změnit vzorec pro výpočet *souřadnice* zrychlení. Zde platí

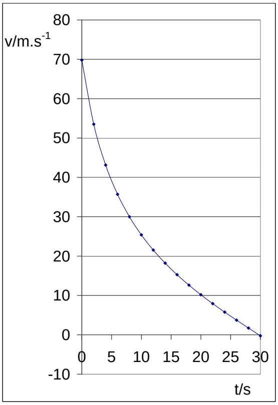
$$a = -fg - \frac{CS\varrho}{2m}v^2.$$

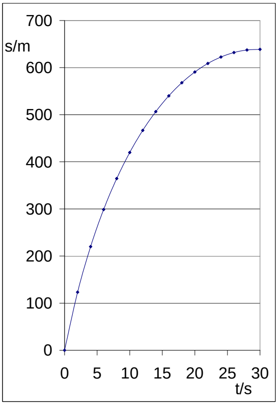
Po dosazení číselných hodnot

$$\{a\} = -0{,}981 - 0{,}00147\{v\}^2.$$

Zvolíme stejný časový krok jako v př. 14. Vzorce pro postupný výpočet rychlosti a dráhy budou proto stejné. Výpočet pomocí vyplňovacího táhla ukončíme, když velikost rychlosti klesne k nule.

t/s	v/m.s^{-1}	s/m	a/m.s^{-2}
0	69,8	0,0	-8,143
2	53,5	123,3	-5,191
4	43,1	220,0	-3,716
6	35,7	298,8	-2,855
8	30,0	364,5	-2,303
10	25,4	419,9	-1,928
12	21,5	466,8	-1,662
14	18,2	506,5	-1,468
16	15,3	540,0	-1,324
18	12,6	567,9	-1,215
20	10,2	590,7	-1,134
22	7,9	608,8	-1,073
24	5,8	622,5	-1,030
26	3,7	632,0	-1,001
28	1,7	637,4	-0,985
30	-0,3	638,9	-0,981





Z tabulky a grafů vyčteme, že za daných podmínek by k zastavení postačila dráha 640 m a brzdění by trvalo asi 30 s.

Poznámka: Analytickým řešením bychom dostali vztah

$$v = \frac{1}{K}\,\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(Kv_0) - gfKt), \quad \text{kde} \quad K = \sqrt{\frac{SC\varrho}{2mgf}}.$$

Úloha

10. Modelujte pomocí Excelu rozjezd Simona Origone a posuďte, jak se jeho rychlost přiblížila mezní hodnotě. Počítejte s parametry $\sin\alpha = 0{,}76$, $f = 0{,}06$, $m = 90$ kg, $S = 0{,}5$ m^2 a se součinitelem odporu $C = 0{,}44$ vypočítaném v příkladu 18.

---

5 Skoky na lyžích

Lyžařský můstek se skládá ze strmého nájezdu, méně skloněného stolu můstku, doskočiště a výjezdu. Charakteristické parametry můstku jsou vzdálenost kritického (konstrukčního) bodu, kde se sklon doskočiště začíná zmírňovat, a velikost můstku (hill size), což je poslední bezpečná zdálenost místa dopadu od hrany stolu. Například na velkém můstku v Harrachově je vzdálenost kritického bodu od hrany stolu můstku 125 m a velikost můstku 142 m.

Délka nájezdu se podle povětrnostních podmínek upravuje tak, že na stole má skokan rychlost 80 km/h až 90 km/h, které dosáhne poté, co sjíždí po nájezdu v aerodynamické poloze. Důležitý je odraz skokana na konci stolu, který může značně ovlivnit délku skoku. Po odrazu zaujme lyžař specifický postoj, aby vznikl aerodynamický vztlak: poněkud roztáhne lyže do tvaru písmene V a nakloní se kupředu. Takto letí po dobu okolo 4 s od okamžiku odrazu až po okamžik dopadu. Skokan doskakuje na skloněný terén, jednu nohu má poněkud více kupředu, aby se účinky dopadu na lidské tělo snížily. Reakce podložky představuje při dopadu až třikrát větší sílu než je tíha skokana.

Délka lyží nesmí přesáhnout výšku skokana o více než 80 cm, maximální povolená hmotnost skokanských lyží je 7,27 kg. Jsou vyrobeny ze dřeva a laminátu, nemají hrany, ale na skluznici je pět podélných drážek, které při rozjezdu zaručují stabilitu.

Příklad 20: Model skoku z velkého můstku
Nájezdová rychlost skokana na velkém můstku je $92\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, sklon stolu můstku je $\alpha_0 = -10{,}5°$. Odhadneme hmotnost skokana i s lyžemi $m = 100$ kg, obsah svislého řezu $S_x = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$, obsah vodorovného řezu $S_y = 1{,}4\ \mathrm{m}^2$, součinitel odporu ve vodorovném směru $C_x = 0{,}7$ a ve svislém směru $C_y = 0{,}9$, hustotu vzduchu $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Zanedbáme odraz lyžaře na konci nájezdu. Za těchto zjednodušujících předpokladů modelujte průběh letu lyžaře během 4 sekund od opuštění stolu můstku s časovým krokem $\Delta t = 0{,}2$ s.

Řešení:
Úlohu budeme řešit v souřadnicové soustavě Oxy, jejíž počátek umístíme na hranu stolu můstku. Kladnou poloosu y budeme orientovat svisle vzhůru. Na skokana působí tíhová síla a odporová síla vzduchu, jejíž souřadnice budeme počítat pomocí vztahů

$$F_x = -\frac{1}{2} C_x S_x \varrho v \cdot v_x, \qquad F_y = -\frac{1}{2} C_y S_y \varrho v \cdot v_y.$$

Z vektorového zápisu pohybové rovnice

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_\mathrm{o}$$

odvodíme pro souřadnice zrychlení vztahy

$$a_x = -\frac{C_x S_x \varrho v \cdot v_x}{2m}, \qquad a_y = -g - \frac{C_y S_y \varrho v \cdot v_y}{2m}.$$

Pro číselné hodnoty

$$\{a_x\} = -0{,}002\,5\{v\}\{v_x\}, \qquad \{a_y\} = -9{,}81 - 0{,}007\,6\{v\}\{v_y\}.$$

Výpočet modelu naprogramujeme v Excelu podobně jako jsme to provedli při modelování pohybu dvousedadlového bobu v příkladu 15. Algoritmus výpočtu ovšem musíme rozepsat pro obě souřadnice rychlosti a polohového vektoru:

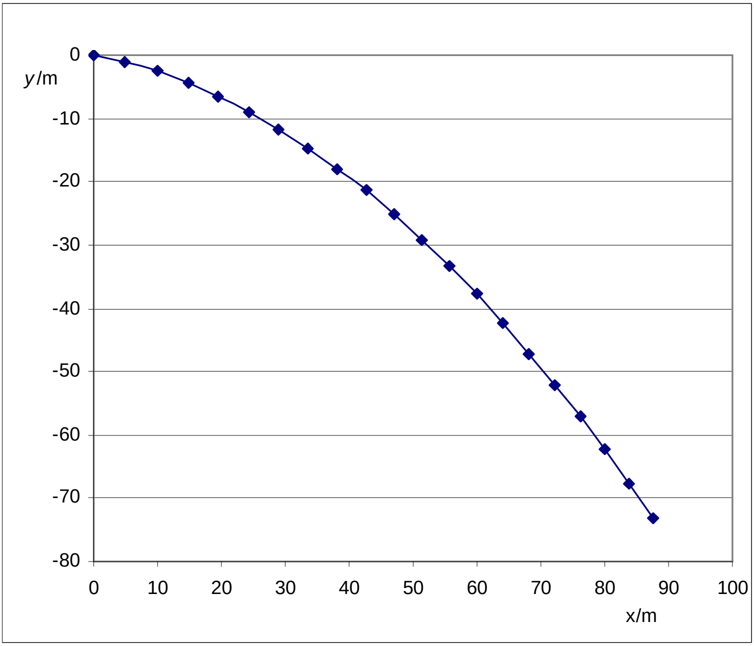
$$v_{x(i+1)} = v_{xi} + a_{xi} \cdot \Delta t, \qquad v_{y(i+1)} = v_{yi} + a_{yi} \cdot \Delta t,$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{xi} \cdot \Delta t + 0{,}5 a_{xi} \cdot (\Delta t)^2, \qquad y_{i+1} = y_i + v_{yi} \cdot \Delta t + 0{,}5 a_{yi} \cdot (\Delta t)^2.$$

Následující tabulka byla získána tímto postupem:

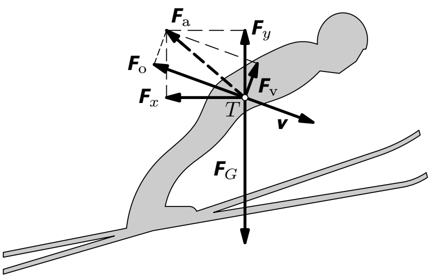
1. Do buněk H2 a I2 byly vloženy vzorce pro výpočet souřadnic zrychlení.
2. Do buněk A2 až G2 byly vloženy počáteční hodnoty veličin uvedných v záhlaví tabulky.
3. Do buňky J2 byl vložen vzorec pro výpočet odchylky α vektoru okamžité rychlosti od vodorovného směru ve stupních `=DEGREES(ARCTG(C2/B2))`.
4. Buňky H2 až J2 byly vyplňovacím táhlem zkopírovány o řádek níže.
5. Do buněk A3 až G3 byly vloženy vzorce pro postupný výpočet času, souřadnic rychlosti a polohového vektoru a jejich velikosti.
6. Po označení vyplněných buněk třetího řádku byl pomocí vyplňovacího táhla proveden výpočet tabulky.

t/s	v_x/m.s^{-1}	v_y/m.s^{-1}	v/m.s^{-1}	x/m	y/m	r/m	a_x/m.s^{-2}	a_y/m.s^{-2}	α
0	25,1	-4,7	25,5	0,0	0,0	0,0	-1,60	-8,91	-10,5
0,2	24,8	-6,4	25,6	5,0	-1,1	5,1	-1,59	-8,56	-14,6
0,4	24,5	-8,2	25,8	9,9	-2,6	10,2	-1,58	-8,21	-18,4
0,6	24,1	-9,8	26,1	14,8	-4,4	15,4	-1,57	-7,87	-22,1
0,8	23,8	-11,4	26,4	19,6	-6,5	20,6	-1,57	-7,53	-25,5
1	23,5	-12,9	26,8	24,3	-8,9	25,9	-1,58	-7,19	-28,7
1,2	23,2	-14,3	27,3	29,0	-11,6	31,2	-1,58	-6,84	-31,7
1,4	22,9	-15,7	27,7	33,6	-14,6	36,6	-1,59	-6,50	-34,4
1,6	22,6	-17,0	28,2	38,1	-17,9	42,1	-1,59	-6,16	-37,0
1,8	22,3	-18,2	28,8	42,6	-21,4	47,7	-1,60	-5,83	-39,3
2	21,9	-19,4	29,3	47,0	-25,2	53,3	-1,60	-5,50	-41,5
2,2	21,6	-20,5	29,8	51,4	-29,2	59,1	-1,61	-5,18	-43,5
2,4	21,3	-21,5	30,3	55,7	-33,4	64,9	-1,61	-4,86	-45,3
2,6	21,0	-22,5	30,7	59,9	-37,8	70,8	-1,61	-4,56	-47,0
2,8	20,6	-23,4	31,2	64,1	-42,3	76,8	-1,61	-4,26	-48,6
3	20,3	-24,3	31,6	68,2	-47,1	82,9	-1,61	-3,98	-50,0
3,2	20,0	-25,0	32,1	72,2	-52,0	89,0	-1,60	-3,71	-51,4
3,4	19,7	-25,8	32,4	76,2	-57,1	95,2	-1,60	-3,45	-52,7
3,6	19,4	-26,5	32,8	80,1	-62,3	101,5	-1,59	-3,21	-53,8
3,8	19,0	-27,1	33,1	83,9	-67,7	107,8	-1,58	-2,98	-54,9
4	18,7	-27,7	33,5	87,7	-73,2	114,2	-1,57	-2,76	-56,0



Z tabulky zjistíme, že skokan by za uvedených předpokladů doletěl za 4 s přibližně do vzdálenosti kritického bodu můstku, která je 120 m, a pohyboval by se rychlostí 34 m $\cdot$ s^{-1} pod úhlem $-56°$.

Protože se konstanty S_x a C_x liší od konstant S_y a C_y, nemá výsledná aerodynamická síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{a}$ opačný směr než okamžitá rychlost skokana. Rozkládá se na složku odporovou $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$, která má opačný směr než okamžitá rychlost skokana a brzdí jej, a na složku vztlakovou $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$, která je k ní kolmá, skokana nadnáší a prodlužuje dálku doskoku.



Úloha

11. Do jaké vzdálenosti od hrany stolu můstku by se dostal skokan z příkladu 20 za 4 sekundy a jakou rychlostí by se přitom pohyboval, kdyby jej nebrzdil odpor vzduchu?

Řešení úloh

1. Průměrné rychlosti byly

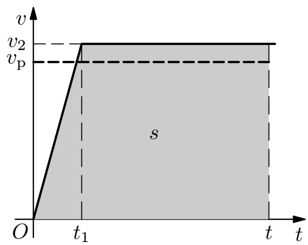
$$v_{p1} = \frac{5\,000}{410{,}92}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 43{,}80\ \mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

$$v_{p2} = \frac{3\,000}{242{,}53}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12{,}37\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 44{,}53\ \mathrm{km\cdot h^{-1}},$$

$$v_{p3} = \frac{1\,500}{117{,}96}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12{,}72\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 45{,}78\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

2. a) Z grafu rychlosti odvodíme pro celkovou dráhu s vztah

$$s = \frac{v_2 t_1}{2} + v_2(t - t_1) = v_2\left(t - \frac{t_1}{2}\right),$$



kde t je celková doba jízdy, t_1 doba rozjíždění a v_2 rychlost, které závodnice dosáhla. Z toho

$$v_2 = \frac{2s}{2t - t_1} = 14{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dosažená rychlost na druhém úseku trati byla tedy asi o $1{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ větší než rychlost průměrná.

b) Závodnice se rozjížděla se zrychlením

$$a_1 = \frac{v_2}{t_1} = 1{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

3. a) Označme rychlost dvojice před odstrčením v, rychlost partnera po odstrčení v_1, rychlost partnerky po odstrčení v_2 a relativní rychlost obou v_r. Použijeme zákon zachování hybnosti. Řešením soustavy rovnic

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v, \qquad v_2 - v_1 = v_r$$

dostaneme

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r + v = \left(\frac{72}{120}\cdot 0{,}8 + 2{,}4\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 2{,}88\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_1 = 2{,}08\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

b) Po odstrčení urazí krasobruslaři dráhy

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a} = \frac{v_1^2}{2fg} = \frac{2{,}08^2}{2\cdot 0{,}027\cdot 9{,}81}\ \mathrm{m} = 8{,}2\mathrm{m},$$

$$s_2 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{v_2^2}{2fg} = \frac{2{,}88^2}{2\cdot 0{,}027\cdot 9{,}81}\ \mathrm{m} = 15{,}7\mathrm{m}.$$

Budou se tedy nacházet ve vzájemné vzdálenosti 7,5 m.

4. Krasobruslař dopadne na led za dobu $t = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}7$ s (viz příklad 5). Doba jedné otáčky je $T = \dfrac{0{,}7\ \mathrm{s}}{3{,}5} = 0{,}2$ s, frekvence otáčení $f = \dfrac{1}{T} = 5\ \mathrm{s^{-1}}$.

5. $v_\mathrm{m} = \sqrt{\dfrac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}} \doteq 47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 170\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

6. Dosadíme číselné hodnoty do výše uvedených vzorců. Na přímé trati se bude bob při dané rychlosti pohybovat se zrychlením o velikosti $a = 0{,}79\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V zatáčce bude jeho tečné zrychlení $a_\mathrm{t} = 0{,}46\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

7. Sklonu 15 % odpovídá úhel sklonu 8,6°. V okamžiku, kdy se lyžař odpoutá od terénu, platí

$$v = \sqrt{rg\cos\alpha} = 12\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

8. Tíha lyžaře se zvětší o sílu odstředivou, tedy $mg + \dfrac{mv^2}{r} = 2mg$. Z toho

$$v = \sqrt{rg} = 7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

9. Na vodorovné trati má třecí síla velikost $F_\mathrm{t} = fmg$. Pokud by závodníka brzdila jen třecí síla, rovnala by se počáteční kinetická energie závodníka práci potřebné na její překonání:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_0^2 = W = F_\mathrm{t}s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{mv_0^2}{2F_\mathrm{t}} = \frac{v_0^2}{2fg} \doteq 2\,400\ \mathrm{m}.$$

Bez odporu vzduchu by mu brzdná zóna v Les Arcs nestačila.

10. Budeme postupovat obdobně jako v příkladu 14. Vzorec pro výpočet pro souřadnici zrychlení je opět

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{CS\varrho}{2m}v^2,$$

po dosazení číselných hodnot

$$\{a\} = 7{,}07 - 0{,}00147\{v\}^2.$$

Zvolíme stejný časový krok jako v př. 14. Vzorce pro postupný výpočet rychlosti a dráhy budou proto stejné. Výpočet pomocí vyplňovacího táhla ukončíme, když dráha dosáhne délky rozjezdového sektoru 800 m.

t/s	v/m.s^{-1}	s/m	a/m.s^{-2}
0	0,0	0	7,07
2	14,1	14	6,78
4	27,7	56	5,94
6	39,6	123	4,77
8	49,1	212	3,52
10	56,2	317	2,43
12	61,0	434	1,60
14	64,2	560	1,01
16	66,2	690	0,62
18	67,5	824	0,38

Z tabulky vyčteme, že rychlost na konci rozjezdu se skutečně velmi přibližuje mezní rychlosti.

11. Vyšetřujeme šikmý vrh bez odporu vzduchu s elevačním úhlem $\alpha_0 = -10{,}5°$ a počáteční rychlostí $v_0 = 25{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ v čase $t = 4{,}00$ s. Při něm by platilo

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 = 25{,}17\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \quad v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt = -43{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$x = v_0 t\cos\alpha_0 = 100{,}7\ \mathrm{m}, \quad y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2 = -97{,}14\ \mathrm{m},$$

Skokan by se nacházel ve vzdálenosti $r = \sqrt{x^2+y^2} = 140$ m od hrany stolu můstku a jeho okamžitá rychlost by měla velikost $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} =$ $= 50{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Literatura

[1] Bednařík, M. Široká, M.: *Fyzika pro gymnázia. Mechanika.* Praha, Prometheus, 2000.

[2] Svoboda, E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky.* Praha, Prometheus, 2006.

[3] Šedivý, P.: *Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami.* Studijní text FO, Hradec Králové, MAFY, 2010.

[4] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Pohyb těles s vlivem odporových sil.* Studijní text FO, Hradec Králové, MAFY, 2002.

[5] <http://www.wikipedia.cz/.>

[6] <http://www.aktualne.cz/.>

[7] <http://skokynl.xf.cz/.>

[8] <http://aktualne.centrum.cz/sportplus/.>

[9] <http://www.aprilmaya.estranky.cz/clanky/sportovni-pary/.>

[10] <http://www.allposters.cz/-st/Extremni-sporty-Plakaty/.>

[11] <http://www.pininfarina.it/.>

[12] <http://www.numberczech.cz/2012/01/09/.>

[13] <noveformy.cz/ribbon/ribbon-reference/skokansky-mustek-holmenkollen/>